

*Alla mia famiglia*

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

---

Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

**Caratterizzazione di una vela solare composta**



Relatori:  
Prof. Giovanni Mengali

Laureando:  
Massimiliano ALBANI

Prof. Carlo Casarosa

Correlatore:  
Ing. Alessandro Quarta

**05 MS 03 713**

---

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

# Sommario

Il presente lavoro di tesi descrive la caratterizzazione di una vela solare composta tenendo conto di due possibili modelli fisici per la vela solare (ideale e ottico) e li confronta dal punto di vista dei problemi di progetto e delle prestazioni.

Nella seconda parte viene studiata l'applicazione della teoria di controllo ottimo alla vela composta non ideale per il calcolo di traiettorie tridimensionali di minimo tempo per il problema di rendezvous interplanetario verso Marte.

# Ringraziamenti

Voglio ringraziare prima di tutti la mia famiglia, la dolcezza e l'affetto di mia sorella Joe, l'amore di mia madre, gli insegnamenti di vita di mio padre ed il loro credere in me, devo anche a loro l'esser giunto fin qua, ma soprattutto devo a loro parte fondamentale della mia crescita come persona ed uomo.

Dei ringraziamenti sentiti li devo al professor G. Mengali per la sua disponibilità e attenzione durante questo lavoro di Tesi, e al Ing. A. Quarta, correlatore e compagno dei numerosi giorni di laboratorio, per i suoi preziosi consigli.

Un grazie speciale va a Moira la ragazza che cammina per mano con me rendendo la mia vita più leggera e viva. Ringrazio poi tutti quelli che, ciascuno a suo modo, mi sono sempre stati vicini, gli amici di sempre (Simone, Ronnie, Cristiana, Monica, Simona) su cui so' di poter contare, e i colleghi di università (Enry, Manu, Zordan, Cri riccio, Lucone, le Chips, ecc..) con cui ho condiviso ore di lezioni, viaggi da pendolare ed altro ancora.

Un ringraziamento non meno importante va infine a quelli che hanno regalato alla mia vita qualcosa che mi ha arricchito e che porto dentro (Marianeve, Silvia, Nicolas, Luca, Ale, Lorè, Elisa, Chiara, ecc..).

# Indice

<b>Sommario</b>	<b>I</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>II</b>
<b>Elenco dei simboli</b>	<b>VI</b>
<b>I Le Vele Solari</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduzione generale</b>	<b>2</b>
1.1 La propulsione con vela solare . . . . .	2
1.2 Obiettivi della tesi . . . . .	3
1.3 Missioni tipiche con vele solari . . . . .	4
<b>2 Introduzione alle Vele Solari</b>	<b>7</b>
2.1 Generalità . . . . .	7
2.2 Tipologie di configurazioni . . . . .	8
2.2.1 Heliogyro, Stabilizzata a spin . . . . .	8
2.2.2 Vela Quadrata, Stabilizzata a tre assi . . . . .	9
2.2.3 Vela Circolare, Stabilizzata a spin . . . . .	10
2.2.4 Il Solar Photon Thrustor . . . . .	13
2.3 Materiali di realizzazione . . . . .	13
<b>3 Modelli Fisici</b>	<b>16</b>
3.1 Modello della spinta . . . . .	16
3.2 Il sistema di riferimento . . . . .	17
3.3 Il modello della forza . . . . .	18

3.3.1	Caso ideale . . . . .	18
3.3.2	Caso ottico . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Studio della Vela SPT</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Descrizione strutturale della vela composta</b>	<b>22</b>
4.1	Suddivisione del SPT in componenti . . . . .	22
4.1.1	Il collettore . . . . .	22
4.1.2	Il riflettore . . . . .	24
4.1.3	Lo specchio direttore . . . . .	28
4.1.4	Parametri di progetto . . . . .	28
4.2	Ipotesi semplificative di progetto . . . . .	30
4.2.1	Possibili soluzioni . . . . .	31
4.3	Scelte di progetto . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Modello Ideale</b>	<b>33</b>
5.1	Schema delle forze e spinta risultante . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Modello Ottico</b>	<b>36</b>
6.1	Schema delle forze . . . . .	36
6.1.1	Collettore . . . . .	37
6.1.2	Riflettore . . . . .	40
6.1.3	Specchio direttore . . . . .	44
6.2	Nuovo sistema di riferimento . . . . .	49
6.3	Spinta risultante del modello . . . . .	50
6.3.1	Dipendenze della spinta . . . . .	53
6.4	Forza radiale e forza normale . . . . .	54
6.5	Angolo di spinta $\tau$ . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Confronto tra modelli</b>	<b>60</b>
7.1	SPT - Vela piana . . . . .	60
7.1.1	Modello ideale . . . . .	61
7.1.2	Modello ottico . . . . .	62
7.2	SPT ottico - SPT ideale . . . . .	64

<b>III</b>	<b>Controllo Ottimo</b>	<b>65</b>
<b>8</b>	<b>Controllo Ottimo</b>	<b>66</b>
8.1	Equazioni del moto . . . . .	66
8.2	Definizione delle prestazioni . . . . .	67
8.3	Accelerazione del SPT . . . . .	67
8.3.1	Modello ideale . . . . .	67
8.3.2	Modello ottico . . . . .	69
8.3.3	Relazioni tra $a_c$ e $\beta$ . . . . .	70
8.4	Ottimizzazione della traiettoria . . . . .	72
8.4.1	Controllo ottimo del modello ottico . . . . .	72
8.5	Il problema di ottimo . . . . .	76
8.6	Metodo di Soluzione . . . . .	76
8.6.1	Integrazione Numerica . . . . .	77
8.6.2	Algoritmo Risolutivo . . . . .	77
<b>9</b>	<b>Analisi di missione Terra - Marte</b>	<b>78</b>
9.1	Caratteristiche dell'analisi di missione . . . . .	78
9.2	Analisi dei risultati . . . . .	79
<b>10</b>	<b>Conclusioni e possibili sviluppi futuri</b>	<b>83</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>
	<b>Elenco delle figure</b>	<b>87</b>

# Elenco dei Simboli

$'$	APICE: Coefficienti utilizzanti il medesimo materiale per ogni componente
$*$	APICE: Critico
$\alpha$	Angolo di cono
$\beta$	Parametro di snellezza
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Versori del sistema eliocentrico
$\hat{n}$	Versore normale alla superficie della vela
$\hat{t}$	Versore tangente alla superficie della vela
$\epsilon$	Coefficiente di emissione termica
$\lambda$	Rapporto tra superficie del collettore e superficie del riflettore
$\mu_1$	Angolo del foro nel collettore
$\mu_o$	Angolo di apertura del collettore
$\rho$	Coefficiente di riflessione
$\sigma$	Carico della vela
$\tau$	Angolo di spinta
$\theta$	Angolo di azimut
$\mathbf{a}$	Accelerazione della vela nel sistema eliocentrico



$\boldsymbol{f}$	Vettori delle forze
$\boldsymbol{r}$	Posizione della vela nel sistema eliocentrico
$\boldsymbol{v}$	Velocità della vela nel sistema eliocentrico
$\tilde{\delta}$	Angolo di cono del primer vector
$\tilde{\theta}$	Angolo di controllo del primer vector
$a_c$	Accelerazione caratteristica
$B$	Coefficiente non-Lambertiano
$b$	PEDICE: Superficie posteriore
$c$	Velocità della luce nel vuoto
$c,col$	PEDICE: Collettore
$d,dir$	PEDICE: Direttore
$f$	PEDICE: Superficie anteriore
$grav$	PEDICE: Forza di gravità
$H$	Hamiltoniana
$H'$	Funzione di controllo del Hamiltoniana
$i$	PEDICE: Ideale
$J$	Indice di performance
$K_1, K_2, D_1, D_2, D_3$	Coefficienti ottici
$m$	Massa
$o$	PEDICE: Ottico
$P$	Pressione di radiazione solare
$P_{\oplus}$	Pressione di radiazione solare a 1 AU
$R$	Raggio geometrico

$r, rif$	PEDICE: Riflettore
$S$	Superficie dei componenti della vela
$s$	Frazione dei raggi riflessi specularmente
$S_p$	Superficie proiettata
$t$	Tempo
$v$	PEDICE: Velocità
$W$	Flusso di energia solare
$x, y, z$	Assi di riferimento

Parte I

Le Vele Solari

# 1

## Introduzione generale

### 1.1 La propulsione con vela solare

I sistemi propulsivi si basano comunemente su una massa di reazione che viene portata ad alta velocità attraverso reazioni esotermiche o tramite forze elettromagnetiche.

Le vele solari utilizzano come forza propulsiva l'energia rilasciata dalle stelle sotto forma di radiazione elettromagnetica. Questa fonte di energia esterna, prodotta dalle reazioni nucleari che avvengono nei corpi caldi, è praticamente inesauribile e può garantire una spinta continua per tutta la durata della missione. L'energia che produce tale spinta, ovvero la radiazione elettromagnetica, non si esaurisce nel tempo e l'unico fattore che può ridurre la spinta ottenibile da tale fonte di energia al passare del tempo è la degradazione del film riflettente a causa del danneggiamento del materiale.

La semplice osservazione di poter avere una fonte energetica inesauribile ha spinto la comunità scientifica nella ricerca di materiali ultraleggeri e molto riflettenti con cui costruire le vele solari, per sviluppare la possibilità di realizzare missioni interplanetarie e interstellari senza i tradizionali problemi riguardanti, sia lo spazio dove alloggiare il combustibile necessario per produrre la spinta realizzata tramite i classici motori chimici, sia l'ingombro dei generatori di potenza utilizzati dai motori elettrici.

Quando si considerano i metodi propulsione tradizionali con motori chimici, si osserva che il propellente, solitamente, costituisce la maggior parte della massa della sonda, e il problema del suo alloggiamento rappresenta da

sempre una delle maggiori limitazioni alle possibili missioni spaziali.

Per quanto riguarda invece i motori elettrici, il problema del propellente è meno stringente, ma questi portano nuove problematiche derivanti dalla massa dell'impianto di potenza.

Le vele solari risolvono entrambi i precedenti problemi sfruttando una fonte di energia inesauribile, e possono fornire una spinta continua, seppur con alcune limitazioni. Per questo, soprattutto per missioni che prevedono lunghe tratte, la propulsione solare diviene competitiva rispetto a sistemi più tradizionali.

## 1.2 Obiettivi della tesi

L'obiettivo principale della tesi è in primo luogo l'approfondimento dello studio della vela composta (o Solar Phon Thrustor) la cui idea è stata introdotta da Forward, e lo sviluppo di un modello fisico-matematico dettagliato che permetta una migliore approssimazione del comportamento reale della vela rispetto al modello ideale, precedentemente utilizzato in letteratura.

Il secondo obiettivo della tesi è quello di ottenere traiettorie di minimo tempo per missioni interplanetarie verso Marte, applicando la teoria del controllo ottimo.

Il lavoro è organizzato nel modo seguente: dopo aver illustrato i materiali di realizzazione delle vele solari e le diverse configurazioni di vele, dedicando particolare attenzione alla vela composta SPT (Cap.2), viene fatta un'introduzione alla fisica legata alla pressione di radiazione solare e vengono presentati i due modelli fisici che verranno utilizzati nel seguente lavoro (Cap.3).

Successivamente viene esposta la descrizione strutturale della vela composta (Cap.4), e vengono applicati i due modelli a tale vela (Cap.5-6). I risultati di tali modelli sono confrontati con quelli presenti in letteratura sulle vele piane (Cap.7).

Nella terza ed ultima parte dell'elaborato è esposta la tecnica di controllo ottimo impiegata nella determinazione delle traiettorie di minimo tempo per la vela composta SPT (Cap.8), infine si presentano i risultati ottenuti secondo il modello ottico per missioni interplanetarie verso Marte e i possibili sviluppi futuri (Cap.9).

### 1.3 Missioni tipiche con vele solari

Dopo la dimostrazione dell'esistenza della radiazione elettromagnetica da parte di James Clerk Maxwell(1860), furono fatte le prime ipotesi di usare le radiazioni elettromagnetiche come sistema di propulsione per i veicoli spaziali intorno agli anni '20 da Kostantin Tsiolkovsky e Fridrickh Arturovich Tsander. Negli anni '50 fu ripreso lo studio delle vele solari, poi negli anni '70 Jerome L. Wright studiò una traiettoria per un rendezvous con la cometa di Halley che permetteva di raggiungere il corpo celeste in quattro anni, con un trasferimento tre anni più veloce rispetto alla stessa missione con propulsore elettrico, ma a causa dei problemi connessi con l'apertura della vela il progetto fu abbandonato.

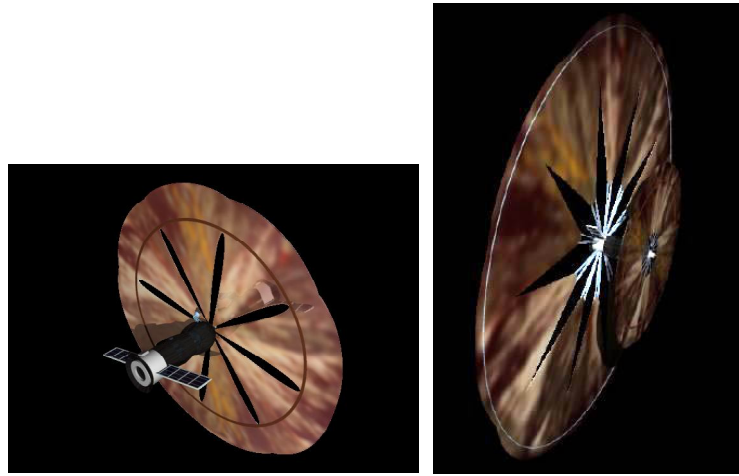
C'è da giungere fin agli anni '90 per trovare un risveglio d'interesse della comunità scientifica verso le vele solari nell'occasione del cinquecentenario della scoperta dell'America, quando fu organizzata una competizione per il design di una missione diretta su Marte utilizzando come mezzo propulsivo vele solari ma nessuno dei progetti proposti fu in seguito realizzato.



**Figura 1.1:** Znamya-2

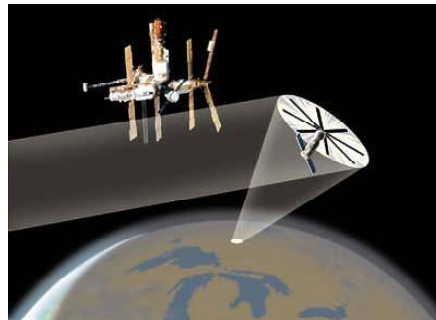
Lo Znamya-2 costruito in Russia realizzò nel 1993 la prima simulazione del primo dispiegamento di vela solare nello spazio. Venne usata la forza centrifuga per ottenere il desiderato dispiegamento. Lo Znamya-2 come i successivi Znamya-2.5 (1999) e lo Znamya-3 (2001) ebbero lo scopo di ricavare i dati relativi al comportamento termo-ottico della vela, e di verificare la

stabilità della struttura e il suo funzionamento.



**Figura 1.2:** Znamya-2.5 (1999) e Znamya-3 (2001)

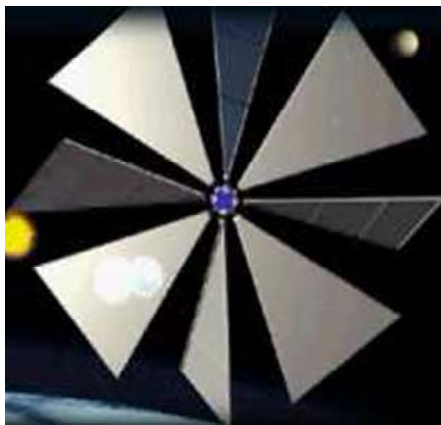
Oltre a questo tali missioni eseguirono con successo un esperimento, detto New Light, per illuminare parte della Terra durante la notte. Attualmente



**Figura 1.3:** Esperimento New light

vele solari sono utilizzate su satelliti Astrium come AOCS (*Eurostar communication satellite*), in quanto essi richiedono una propulsione a bassa spinta e di lunga durata, come quella fornita dalle vele, e ciò potrebbe costituire una svolta nelle loro future applicazioni.

La spinta ottenibile con la radiazione solare dipende dalla distanza dal Sole, ma la forza ottenibile è comunque una quantità molto ridotta, e per questo le vele solari sono progettate per essere utilizzate da satelliti che richiedono, durante la loro vita operativa, basse spinte per una lunga durata.



**Figura 1.4:** Cosmos 1

Nel prossimo Giugno 2005 un sottomarino nucleare russo lancerà dal Mare di Barents un razzo vettore che porterà nello spazio il primo veicolo spaziale completamente propulso a vela solare, il 'Cosmos 1'. Tale lancio sarebbe dovuto avvenire a fine 2004, ma il prototipo della Cosmos 1 è esploso poco dopo la partenza, e anche se si trattava solo di un test, questo avvenimento ha posticipato la data di lancio.



# 2

## Introduzione alle Vele Solari

### 2.1 Generalità

Il sistema propulsivo delle vele solari è, come noto, l'energia trasportata dalla radiazione solare, o meglio dai fotoni emessi dalle reazioni nucleari che avvengono sul Sole. La spinta ottenibile benchè modesta, ha il vantaggio che non è richiesta a bordo la presenza di un generatore di potenza o di un convertitore, e ciò porta una notevole riduzione di massa e quindi di costo del velivolo rispetto ad un architettura convenzionale. D'altra parte l'uso delle vele solari ha come svantaggio che bisogna utilizzare superfici riflettenti notevoli per ottenere le spinte richieste.

Queste grandi superfici di raccolta dell'energia sono essenzialmente specchi grandi e ultraleggeri che riflettono fasci di fotoni di luce o altri tipi di radiazioni elettromagnetiche.

Le dimensioni elevate delle vele portano con sè il problema riguardante l'impacchettamento a terra e il successivo dispiegamento in orbita di vaste superfici di pellicola riflettente e l'eventuale danneggiamento ad opera di corpi esterni vaganti per lo spazio aperto.

Oltre a queste problematiche, nelle vele è bene tenere presente che per avere maggiore efficienza la superficie della vela deve essere tenuta piana e quindi esiste il problema di dover applicare costantemente alla vela una tensione che mantenga la superficie la più piatta possibile.

## 2.2 Tipologie di configurazioni

Esiste una grande varietà di configurazioni delle vele solari, ciascuna configurazione ha in comune con le altre la presenza di un grande specchio riflettente che raccoglie la radiazione elettromagnetica proveniente dal Sole. A questo è collegato il corpo centrale costituito dal payload e dai sistemi di bordo quali i sistemi di navigazione e controllo di assetto, il sistema di controllo termico, le strutture di rinforzo e supporto..ecc..

Per quanto riguarda la funzione di direzionamento della spinta, questa può essere svolta dallo specchio di raccolta o da altre superfici riflettenti più piccole.

Al fine di dare un'esauriente panoramica introduttiva sull'argomento, vengono ora descritte le principali configurazioni con le quali è possibile realizzare vele solari.

Le principali configurazioni di vele solari sono: Vela Circolare, Vela Quadrata, Heliogyro, e la vela composta.

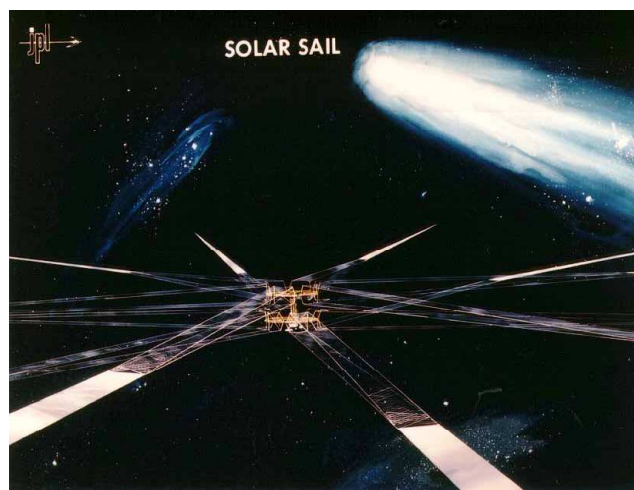
### 2.2.1 Heliogyro, Stabilizzata a spin

L'Heliogyro è stata una delle due configurazioni (l'altra è quella Quadrata) studiata dal JPL per la missione di rendezvous con la cometa di Halley.

L'Heliogyro è una vela solare costituita da lame riflettenti collegate a un corpo centrale (Vedi Figura 2.1), la tensione di tali lame e la stabilità della vela solare è garantita tramite la rotazione attorno all'asse del veicolo spaziale.

Questa tensione ottenuta dalla rotazione permette di eliminare parte della massa necessaria per l'irrigidimento della struttura, in particolar modo per piccole vele. Per vele Heliogyro di dimensioni notevoli invece sussiste lo svantaggio di dover aumentare la rigidità torsionale delle lame per resistere allo spin di rotazione e quindi la massa risparmiata per l'irrigidimento è in proporzione minore rispetto a vele Heliogyro di piccole dimensioni.

Questa configurazione di vela ha come pregio notevole la semplicità di dispiegamento in orbita, durante tale operazione l'asse del corpo centrale è conservato in direzione verso il Sole, e un sistema di rulli permette il dispiegamento delle lame riflettenti. Tale operazione di dispiegamento non è complessa ma è notevolmente delicata in quanto si devono evitare interazioni tra i modi di instabilità della dinamica delle lame. Inoltre bisogna prestare attenzione



**Figura 2.1:** Heliogyro

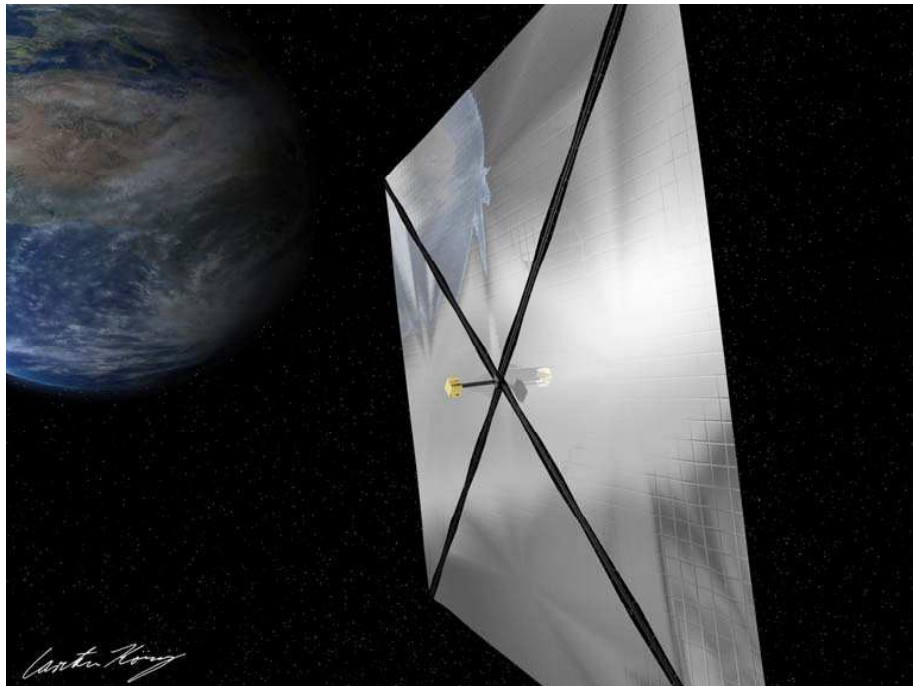
agli effetti termoelastici e puramente meccanici dovuti all'accoppiamento tra passo e piegatura delle lame tanto che questa fase rappresenta la maggior difficoltà nella progettazione dell'Heliogyro stesso.

Esistono vari modelli di Heliogyro, tra cui i più importanti sono piatto e a paracadute.

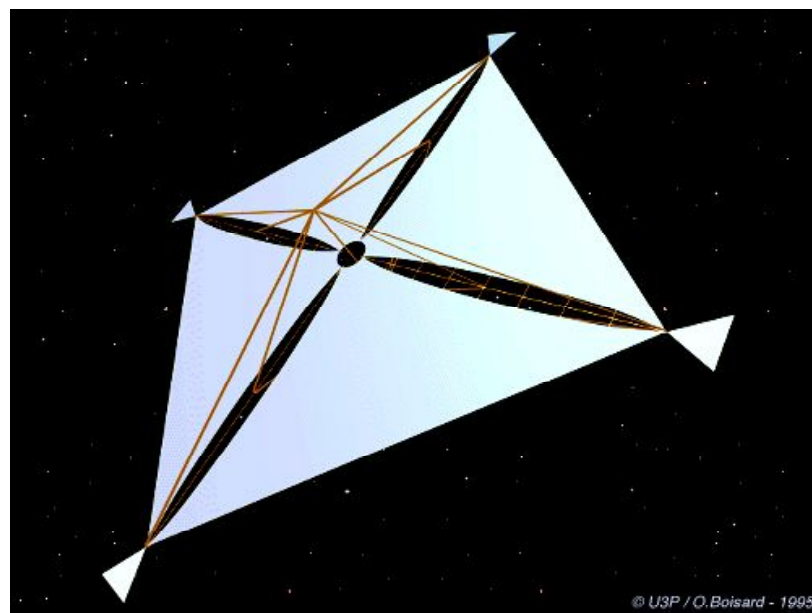
### 2.2.2 Vela Quadrata, Stabilizzata a tre assi

La Vela Quadrata ha un nucleo centrale a cui sono collegate braccia telescopiche la cui funzione è quella di tenere in tensione il sottile film riflettente. La superficie riflettente è formata da quattro o più parti in tensione, come mostrato in figura 2.2. Per vele di elevate dimensioni è necessario introdurre delle aste vincolate alle braccia che riducano i carichi sugli irrigidimenti. Questo tipo di configurazione è stabilizzata a tre assi e il controllo d'assetto viene ottenuto disallineando il centro di pressione e il centro di massa del sistema tramite delle superfici riflettenti mobili poste agli spigoli della vela, come mostrato in figura 2.3, in questo modo è possibile ottenere il momento torcente necessario per la stabilità del veicolo spaziale.

Questo tipo di vela ha un dispiegamento in orbita di non facile realizzazione e il controllo per il direzionamento della spinta non è semplice, a causa della sua grande inerzia. D'altra parte la semplicità della sua forma ne facilita la costruzione e l'impacchettamento a terra.



**Figura 2.2:** Vela Quadrata

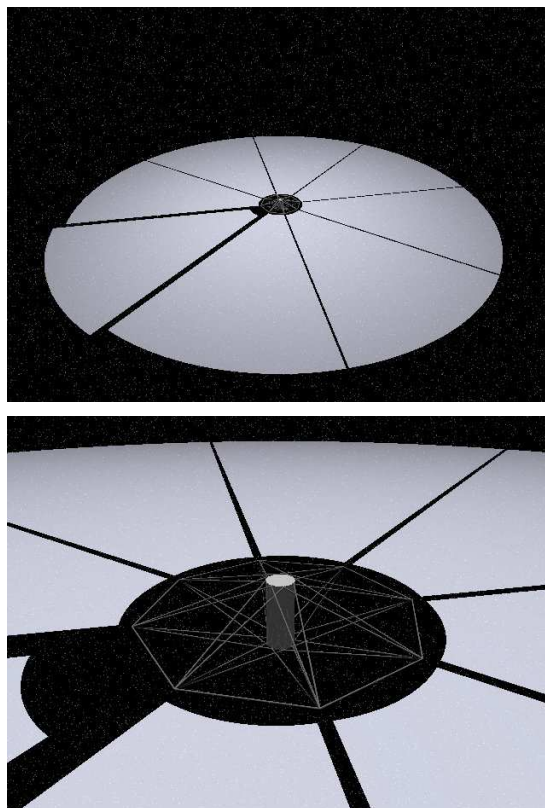


**Figura 2.3:** Vela Quadrata stabilizzata a tre assi

### 2.2.3 Vela Circolare, Stabilizzata a spin

Nella vela circolare o Disc Solar Sail è l'effetto centrifugo dovuto alla rapida rotazione che permette di mantenere la superficie della vela piatta, senza la

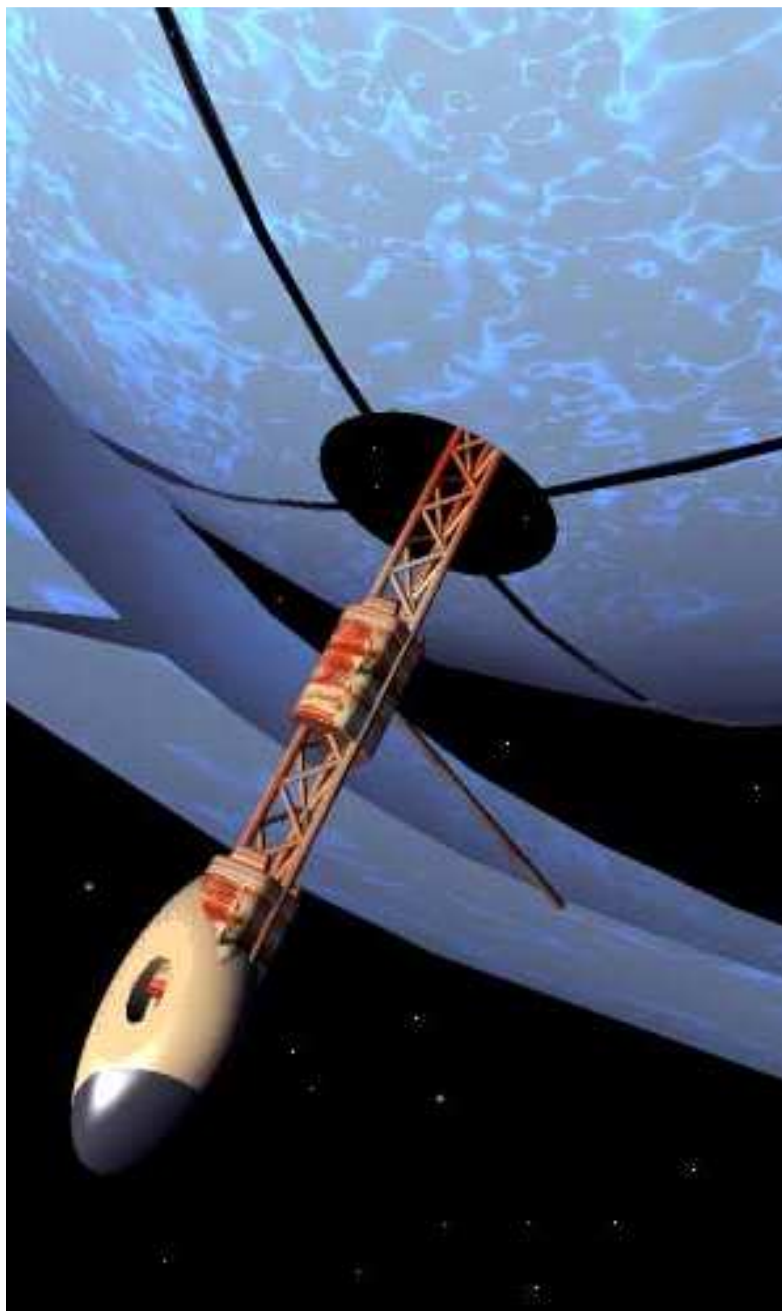
necessità di lame ad alto allungamento come per l'Heliogyro.



**Figura 2.4:** Vela circolare

La vela (vedi figura 2.4) è formata da una serie di spicchi che, dopo il suo completo dispiegamento in orbita, vanno a formare una corona circolare. Solitamente la parte centrale aperta è di dimensioni pari circa al 10% della superficie totale. Nel vano centrale della vela, come mostrato in figura 2.5, giace il corpo centrale, tale corpo è collegato con l'estremità del foro tramite tiranti. I tiranti fungono come sistema di ancoraggio della vela e inoltre, servono per stabilizzare l'estremità del foro e trasferire coppie di torsione tra il corpo centrale e la vela.

Il controllo d'assetto viene ottenuto da coppie di torsione realizzate tramite il disallineamento tra il centro di pressione e il centro di massa. La rotazione della vela conferisce la stabilizzazione della vela circolare mentre le coppie di torsione portano alla precessione dell'asse di rotazione e quindi all'orientamento desiderato della vela.



**Figura 2.5:** Corpo centrale della vela circolare

Va infine osservato che l'effetto della pressione di radiazione solare sulla superficie della vela che ha, come sopra descritto, una massa concentrata al centro, produce una curvatura alla vela, conferendo generalmente alla struttura una forma leggermente conica.

### 2.2.4 Il Solar Photon Thrustor

Ultima, ma non per importanza in quanto è la configurazione che costituirà lo studio di questo elaborato, il Solar Photon Thrustor è una vela composta, ideata negli anni '70 nell'allora Unione Sovietica e poi ripresa agli inizi degli anni '90 da R.Forward.

In questa configurazione, a differenza dei tre precedenti casi, la funzione di raccogliere la radiazione elettromagnetica è separata dalla funzione di riflettere le radiazioni e quindi dirigere la spinta.

La funzione di raccolta è eseguita un grande paraboloide, chiamato collettore, che è rivolto costantemente verso la fonte energetica, in questo modo si ha sempre la massima esposizione ai raggi.

I raggi riflessi dal collettore vengono poi raccolti da un componente che prende il nome di riflettore e diretti verso un ultimo specchio riflettente orientabile, detto direttore, che assolve il compito di dirigere la spinta complessiva. Il direttore ha dimensioni molto inferiori del collettore, solitamente dell'ordine di un centesimo del precedente, questo ne favorisce la controllabilità della vela.

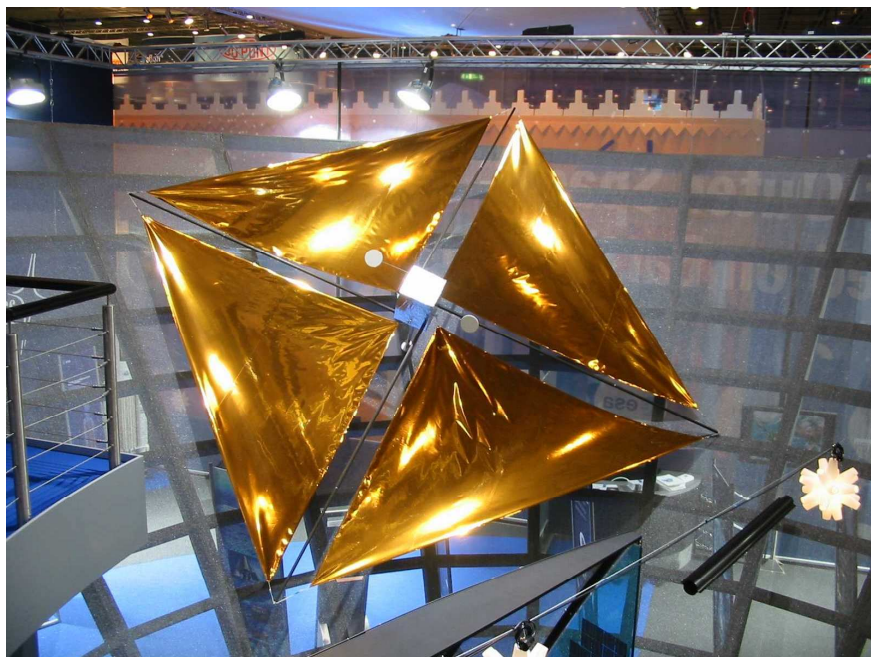
Nell'SPT si notano i vantaggi di poter raccogliere costantemente un flusso energetico massimo al variare della direzione della spinta desiderata (tramite il collettore), e la sua buona manovrabilità. D'altra parte la vela composta ha una struttura più complessa delle precedenti in particolare lo specchio di raccolta deve essere perfettamente parabolico, inoltre il far convergere sul direttore un flusso energetico di notevole intensità, che è stato raccolto dal collettore, può portare un riscaldamento eccessivo del direttore e un deterioramento del film riflettente.

## 2.3 Materiali di realizzazione

I materiali impiegati per la realizzazione delle vele solari hanno un importanza fondamentale nella realizzazione delle vele. Lo studio dei materiali impiegati per costituire le vele, al fine di migliorarne le caratteristiche termottiche, è uno punti fondamentali della ricerca su vele, su di esso vengono impiegate grandissime risorse.

La struttura fondamentale della pellicola è formata principalmente da una





**Figura 2.6:** Esempio di materiale per la realizzazione di vele solari

base su cui aderisce il rivestimento riflettente. La base è comunemente costituita da strati di polimeri mentre lo strato esterno esposto alle radiazioni è costituita da materiale con buona riflessibilità, comunemente un metallo con ottime caratteristiche riflettenti e alta temperatura di fusione.

Gli strati intermedi della pellicola devono sopportare un minimo piegamento della struttura sotto l'effetto della pressione di radiazione solare, e devono inoltre permettere l'operazione di impacchettamento a Terra e il dispiegamento in orbita. Questi materiali devono resistere alla tensione a cui vengono tenuti costantemente in tutta la loro vita, per conferire alla vela la forma desiderata.

Un ottimo candidato è il Kapton o il Myvar, mentre si stanno studiando nuovi polimeri in fibre di carbonio che hanno una temperatura massima di utilizzo molto più elevata e una migliore resistenza rispetto ai precedenti.

Il rivestimento posteriore infine dovrà garantire dal lato che non è esposto ai raggi solari una buona emissività per dissipare il calore introdotto, dato che parte dell'energia fotonica incidente viene assorbita.

Il Kapton-Alluminio ha le seguenti proprietà termo-ottiche:

- coefficiente di riflessione delle radiazioni  $\simeq 0.88$



- coefficiente di trasmissione delle radiazioni  $\simeq 0$
- percentuale di raggi riflessi specularmente  $\simeq 94\%$  del totale dei raggi riflessi
- coefficiente di emissività termica della superficie riflettente  $\simeq 0.05$
- coefficiente di emissività termica della superficie non esposta alle radiazioni  $\simeq 0.55$

# 3

## Modelli Fisici

In questo studio sono stati adoperati due diversi modelli fisici, un modello più semplice, detto *ideale* che considera la vela perfettamente riflettente, ed un modello più complesso, detto modello *ottico*, dove viene meno l'ipotesi di vela perfettamente riflettente.

Lo studio che segue è di tipo bidimensionale ed applicato ad una vela piana.

### 3.1 Modello della spinta

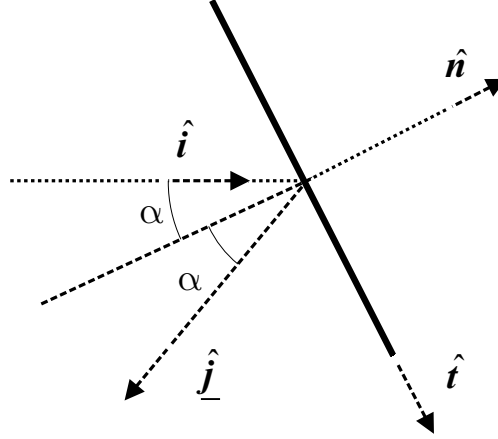
La forza propulsiva delle vele solari è la pressione di radiazione solare.

La fisica di questo fenomeno può esser descritta indipendentemente considerando due diverse interpretazioni della natura della luce: quella quantistica e quella elettromagnetica. Entrambe le teorie hanno come risultato che la pressione di radiazione solare è uguale al rapporto tra il flusso energetico e la velocità della luce. Nel primo modello la pressione è interpretata come quantità di moto trasportato dai fotoni per unità di area in unità di tempo, mentre nel secondo modello la pressione è vista come densità di energia dell'onda elettromagnetica.

Se  $P$  è la pressione della radiazione solare sussiste la seguente relazione:

$$P = \frac{W}{c} \quad (3.1)$$

dove  $W$  è il flusso di energia per unità di area in unità di tempo e  $c$  è la velocità della luce nel vuoto. Il flusso di energia  $W$  è esprimibile attraverso



**Figura 3.1:** Sistema di riferimento e angoli caratteristici della vela

la relazione:

$$W = \frac{W_{\oplus} r_{\oplus}^2}{r^2} \quad (3.2)$$

dove la costante  $W_{\oplus} = 1\,368\,\text{J s}^{-1}\text{m}^{-2}$  rappresenta il flusso di energia che arriva sulla Terra,  $r_{\oplus}$  è la distanza Terra-Sole e  $r$  è la distanza della vela dal Sole.

La pressione  $P$  può essere a sua volta espressa in funzione della pressione di radiazione solare a distanza 1 AU, della distanza Terra-Sole  $r_{\oplus}$  e della distanza  $r$  dal Sole:

$$P = \frac{P_{\oplus} r_{\oplus}^2}{r^2} \quad (3.3)$$

La pressione ad una distanza astronomica (1 AU) dal Sole è indicata con  $P_{\oplus}$ .

## 3.2 Il sistema di riferimento

Il sistema di riferimento utilizzato è mostrato in Figura 3.1. Rispetto a questo sono definite le forze agenti sulla vela.

L'angolo  $\alpha$  è chiamato “angolo di cono” (*cone angle*) della vela solare e rappresenta l'angolo tra la direzione di propagazione dei raggi solari  $\hat{\mathbf{i}}$  e la normale alla superficie della vela stessa  $\hat{\mathbf{n}}$  in direzione della spinta prodotta. La direzione di riflessione dei raggi è definita dal versore  $\hat{\mathbf{j}}$  mentre  $\hat{\mathbf{t}}$  rappresenta il versore tangente alla superficie della vela la quale è, per ipotesi, perfettamente piana.

### 3.3 Il modello della forza

Vengono di seguito ricavati i modelli della spinta nel caso di vela piana perfettamente riflettente (caso ideale) e di vela piana parzialmente riflettente (caso ottico).

#### 3.3.1 Caso ideale

Se si considera la vela come un corpo rigido perfettamente riflettente, avente cioè un coefficiente di riflessione unitario  $\rho = 1$ , la forza  $\mathbf{f}_i$  esercitata dai raggi incidenti sulla vela di superficie riflettente  $A$  nella direzione del versore  $\hat{\mathbf{i}}$  è espressa da:

$$\mathbf{f}_i = PA (\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{i}} \quad (3.4)$$

mentre la forza esercitata dai raggi riflessi nella direzione  $\hat{\mathbf{j}}$  è espressa da:

$$\mathbf{f}_j = -PA (\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{j}} \quad (3.5)$$

Componendo le due forze che hanno la medesima intensità, e hanno un angolo d'incidenza  $\alpha$  con il versore normale alla superficie della vela  $\hat{\mathbf{n}}$  (vedi Figura 3.1) si ottiene una spinta risultante data da:

$$\mathbf{f} = 2PA (\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (3.6)$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}$  è il versore normale alla superficie della vela e  $\hat{\mathbf{i}}$  è la direzione dei raggi solari. Essendo  $\alpha \in [0, \pi/2]$  l'angolo compreso tra i due versori  $\hat{\mathbf{i}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$

$$\cos \alpha = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.7)$$

l' Eq.(3.6) può essere espressa come:

$$\mathbf{f} = 2PA \cos^2 \alpha \hat{\mathbf{n}} \quad (3.8)$$

#### 3.3.2 Caso ottico

Nel caso non si consideri la vela perfettamente riflettente ( $\rho < 1$ ), si arriva ad una seconda formulazione dell'espressione della spinta generata.

La forza risultante è data da un contributo dovuto all'assorbimento di una

parte dei fotoni, uno dovuto alla riflessione e un ultimo dovuto alla emissione termica del materiale. Tenendo presente un certo grado di assorbimento, la forza data da questo effetto è definita dall'equazione:

$$\mathbf{f}_a = PA [\cos^2 \alpha \hat{\mathbf{n}} + \sin \alpha \cos \alpha \hat{\mathbf{t}}] \quad (3.9)$$

L'eventuale ed auspicabile differenza di emissività termica tra superficie anteriore e posteriore genera la forza  $\mathbf{f}_c$  espressa dalla relazione:

$$\mathbf{f}_c = PA(1 - \rho) \frac{B_f \epsilon_f - B_b \epsilon_b}{\epsilon_f + \epsilon_b} \cos \alpha \hat{\mathbf{n}} \quad (3.10)$$

dove  $\rho$  indica il coefficiente di riflessione, ovvero la frazione di fotoni riflessi, mentre vengono indicati con  $B_f$  e  $B_b$  i coefficienti non-Lambertiani rispettivamente della superficie della vela investita dalla radiazione solare (front surface) e della superficie in ombra (back surface), mentre con  $\epsilon_f$  e  $\epsilon_b$  i coefficienti di emissione rispettivamente della front and back surface. Infine la riflessione dei raggi produce la forza  $\mathbf{f}_r$  data dalla relazione:

$$\mathbf{f}_r = PA [(\rho s \cos^2 \alpha + B_f (1 - s) \rho \cos \alpha) \hat{\mathbf{n}} + \rho s \sin \alpha \cos \alpha \hat{\mathbf{t}}] \quad (3.11)$$

dove si indica con  $s$  la frazione dei fotoni riflessi che viene diretta specularmente dalla vela.

Sommando i vari contributi si ottiene la seguente espressione delle componenti della spinta lungo i versori  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\hat{\mathbf{t}}$ :

$$\mathbf{f}_n = PA[(1 + \rho s) \cos^2 \alpha + B_f (1 - s) \rho \cos \alpha + (1 - \rho) \frac{B_f \epsilon_f - B_b \epsilon_b}{\epsilon_f + \epsilon_b} \cos \alpha] \hat{\mathbf{n}} \quad (3.12)$$

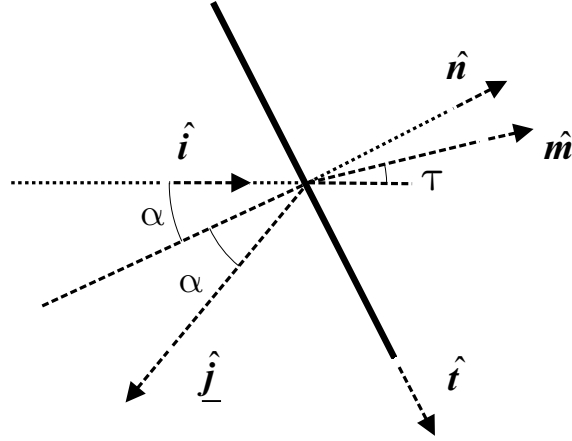
$$\mathbf{f}_t = PA(1 - \rho s) \sin \alpha \cos \alpha \hat{\mathbf{t}} \quad (3.13)$$

La spinta risultante è diretta in direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  e ha modulo  $f$  dato da:

$$f = \sqrt{(f_n)^2 + (f_t)^2} \quad (3.14)$$

dove con  $f_n$  e  $f_t$  son indicati rispettivamente i moduli delle forze  $\mathbf{f}_n$  e  $\mathbf{f}_t$ .

Si definisce con  $\tau$  l'angolo compreso tra la direzione della radiazione elettromagnetica  $\hat{\mathbf{i}}$  e la direzione della forza risultante,  $\tau$  è detto angolo di spinta,



**Figura 3.2:** Sistema di riferimento e angoli caratteristici della vela per il modello ottico

vedi Figura 3.2.

Ponendo infine per brevità:

$$\mathcal{A} \triangleq (1 + \rho s) \quad (3.15)$$

$$\mathcal{B} \triangleq B_f \rho (1 - s) + (1 - \rho) \frac{\epsilon_f B_f - \epsilon_b B_b}{\epsilon_f + \epsilon_b} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{C} \triangleq (1 - \rho s) \quad (3.17)$$

l'espressione della forza totale sulla vela secondo il modello ottico diviene:

$$\mathbf{f} = PA[(\mathcal{A} \cos^2 \alpha + \mathcal{B} \cos \alpha) \hat{\mathbf{n}} + \mathcal{C} \cos \alpha \sin \alpha \hat{\mathbf{t}}] \quad (3.18)$$

## Parte II

### Studio della Vela SPT

# 4

## Descrizione strutturale della vela composta

La vela composta, chiamata anche Solar Photon Thrustor (SPT), ha come componenti fondamentali un collettore, un riflettore ed uno specchio direttore (vedi Figura 4.1) ed è inoltre provvista di un sistema strutturale, al fine di mantenere rigido il modello.

È presente un sistema di controllo che agisce sullo specchio direttore per controllare l'angolo di spinta e simultaneamente sul riflettore per mantenere verificata l'ipotesi di non dispersione dei raggi solari.

Definendo con il termine di *bagnate* le parti di superfici investite dalle radiazioni solari, il parametro di progetto  $\lambda$  è dato dal rapporto tra la superfici bagnate del collettore e del riflettore.

### 4.1 Suddivisione del SPT in componenti

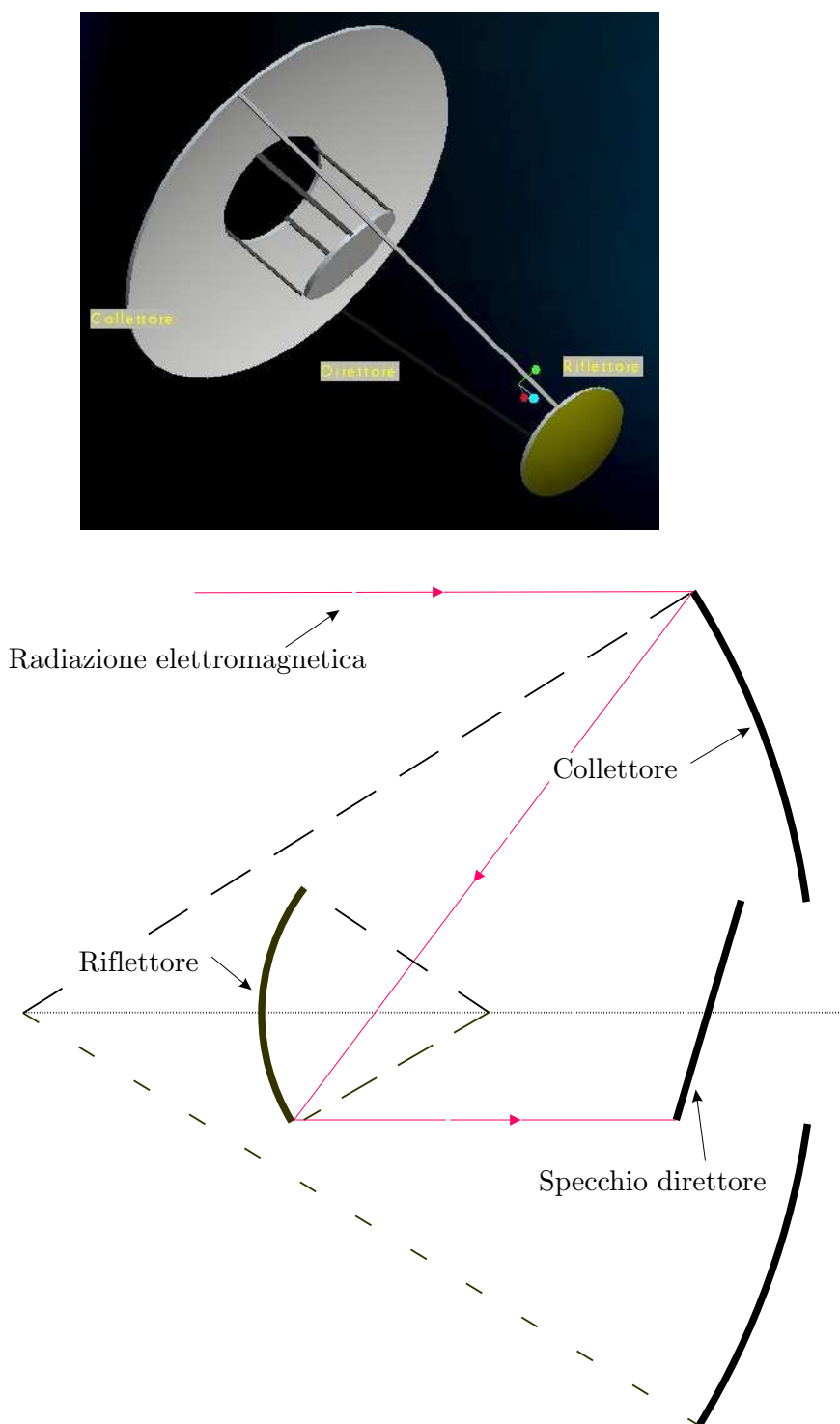
#### 4.1.1 Il collettore

Il collettore ha la forma di una zona sferica. Le sue dimensioni variano in diametro dalle centinaia di metri a qualche chilometro (*Ref.1* pag.35).

La faccia interna, che viene tenuta costantemente rivolta verso il Sole, è rivestita da un film di materiale altamente riflettente, mentre la faccia esterna, sempre in ombra, ha la sola funzione di dissipare calore.

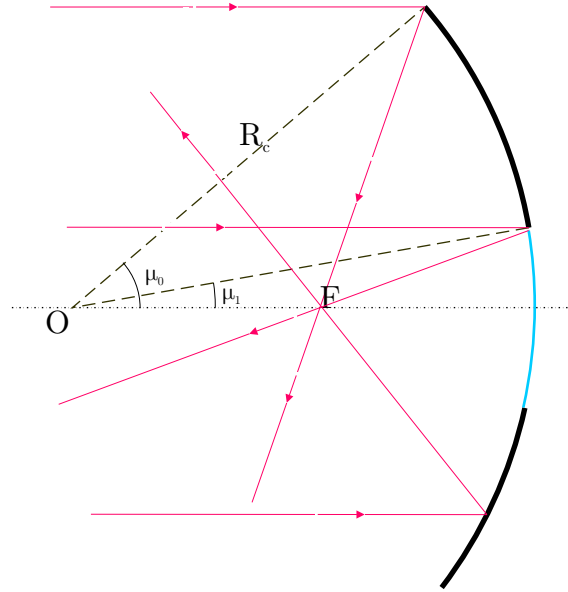
Per distanze dal Sole non troppo piccole, i raggi delle radiazioni solari che





**Figura 4.1:** Schema semplificato della vela

vanno a colpire il collettore possono considerarsi approssimativamente paralleli all'asse del collettore stesso. Questi raggi, raggiunta la superficie interna

**Figura 4.2:** Schema del collettore

del componente, vengono riflessi completamente o in parte a seconda del modello fisico di studio, e convogliati verso il fuoco ottico del collettore.

La geometria della vela (vedi Figura 4.2) è data in funzione dei seguenti parametri:

- Raggio geometrico  $R_c$
- Angolo di apertura  $\mu_0$
- Angolo del foro  $\mu_1$

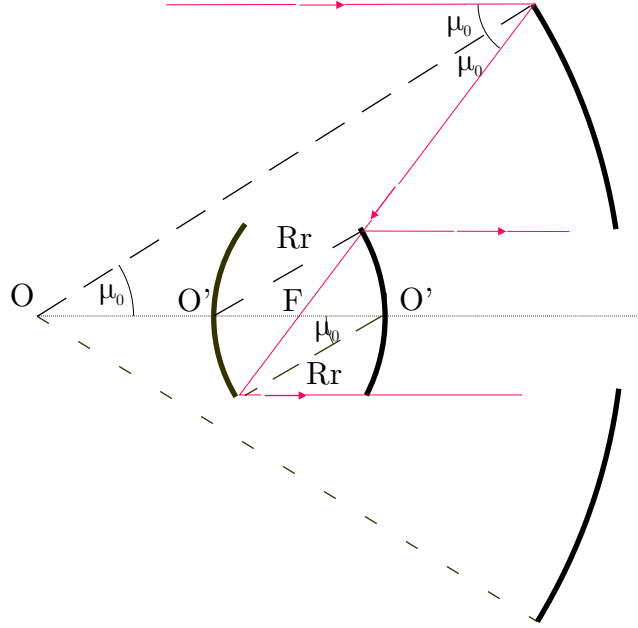
Il fuoco ottico  $F$  è posto sull'asse del collettore ad una distanza pari a  $R_c/2$  dal centro  $O$  della zona sferica.

La superficie interna è interamente investita dal campo elettromagnetico solare.

#### 4.1.2 Il riflettore

Il riflettore ha la forma di una calotta sferica. Il suo asse coincide con quello del collettore.

L'angolo di apertura e il suo fuoco ottico coincidono con quelli del collettore

**Figura 4.3:** Posizioni del riflettore

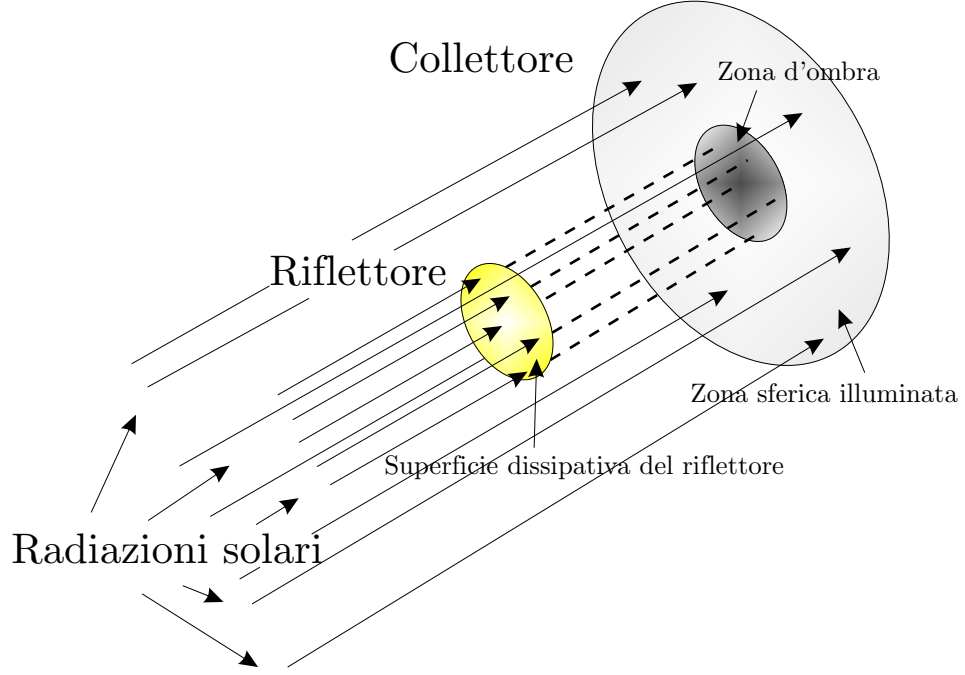
affinché possa raccogliere tutto il flusso solare riflesso da quest'ultimo.

Il raggio geometrico è definito con  $R_r$ , il centro della calotta  $O'$  è posto ad una distanza che varia nell'intorno di  $R_r/2$  dal fuoco, in modo che i raggi riflessi dal riflettore vengano convogliati verso lo specchio direttore.

Se il riflettore viene posto tra il fuoco ottico  $F$  ed il collettore, la superficie esterna della calotta viene rivestita di materiale altamente riflettente mentre quella interna ha la funzione di dissipare il calore. Se invece il riflettore è posizionato tra il centro geometrico del collettore  $O$  ed il fuoco ottico  $F$ , la superficie interna della calotta sferica viene ricoperta di un film di materiale altamente riflettente e ha funzione dissipativa. (Vedi Figura 4.3)

E' utile osservare che la superficie del riflettore che ha funzione dissipativa è tenuta costantemente rivolta verso il Sole, ciò ne rende più complessa la sua funzionalità rispetto alla superficie del collettore che svolge la medesima funzione.

A differenza del riflettore, è conveniente che il collettore abbia la forma di zona sferica e non di calotta sferica, perché il riflettore, come mostrato in figura 4.4, non permetterebbe alle radiazioni solari di bagnare completamente la calotta sferica del collettore. Realizzando quindi il collettore nella forma di zona sferica, anziché di calotta sferica, viene mantenuta la stessa funzionalità



**Figura 4.4:** Zona d'ombra del collettore

del componente, con il vantaggio di aver una struttura più leggera e meno costosa.

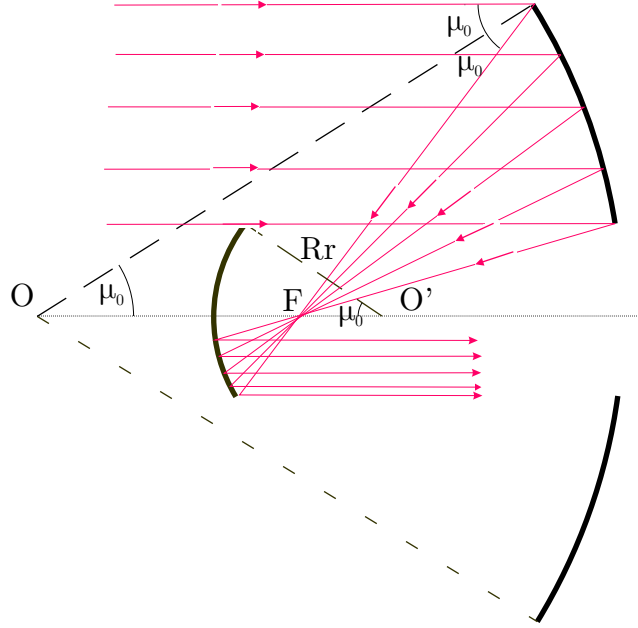
La superficie del riflettore che viene bagnata dai raggi riflessi non è l'intera calotta sferica ma una zona sferica come si può osservare dalla Figura 4.5, dove vengono rappresentati le direzioni dei raggi riflessi specularmente dal collettore. Considerata la simmetria del problema sono state rappresentate parte delle radiazioni solari.

Per questo motivo si potrebbe pensare di realizzare anche il riflettore con la forma di zona sferica anziché di calotta sferica ma ciò non è conveniente, perché così facendo alcune radiazioni provenienti direttamente dal Sole andrebbero a colpire lo specchio direttore.

Ciò non è auspicabile perché si complicherebbe il modello senza ottenere vantaggi rilevanti. Si verifica quest'ultima affermazione partendo dalla definizione di  $\lambda$  e dalla geometria dei componenti collettore e riflettore, da cui ne derivano le relazioni:

$$S^{\text{coll}} = S^{\text{rifl}} \lambda \quad (4.1)$$

$$S^{\text{rifl}} = S_o^{\text{rifl}} \lambda \quad (4.2)$$



**Figura 4.5:** Superficie bagnata del riflettore

dove è indicata con  $S^{\text{coll}}$  la superficie del collettore, con  $S^{\text{rif}}$  la superficie del riflettore bagnata dalle radiazioni riflesse dal collettore (una zona sferica), e con  $S_o^{\text{rif}}$  la superficie del riflettore che non viene colpita dalle radiazioni riflesse dal collettore. Dalle precedenti ne deriva:

$$S_o^{\text{rif}} = \frac{S^{\text{coll}}}{\lambda^2} \quad (4.3)$$

Poiché il parametro  $\lambda$  ha un valore da scegliere nell'intervallo  $[50,100]$ , la  $S_o^{\text{rif}}$  è molto più piccola della superficie del collettore.

Il maggior contributo al peso dell'SPT è dato dal collettore, rispetto a questo il peso di  $S_o^{\text{rif}}$  è trascurabile. Il passare quindi da un riflettore a forma di calotta sferica ad uno a forma di zona sferica, togliendo la  $S_o^{\text{riflettore}}$ , si produce un alleggerimento dell'intera struttura dell'SPT irrilevante.

La forma più convenevole per il riflettore è quella di calotta sferica, ed oltre al compito di dirigere le radiazioni verso il direttore, assume quindi anche la funzione di proteggere lo specchio direttore dalle radiazioni provenienti direttamente dal Sole.

### 4.1.3 Lo specchio direttore

Lo specchio direttore è costituito da una piccola (rispetto al collettore) superficie riflettente sostanzialmente piana e circolare di raggio  $R_d$ .

La funzione primaria del direttore è quella di dirigere la spinta risultante riflettendo verso lo spazio i fotoni raccolti dal collettore e rediretti dal riflettore.

La superficie investita dalla radiazione solare è ricoperta da materiale metallico altamente riflettente mentre la superficie posteriore svolge il compito, come nei casi precedenti, di dissipare calore.

Il centro dello specchio è posto sull'asse collettore-riflettore il più vicino possibile al collettore, purché nel muoversi non vada a urtare contro quest'ultimo. La scelta di tale posizione è dettata dal fatto che così facendo si riduce l'intervallo dell'angolo  $\alpha$  entro il quale i raggi riflessi dallo specchio tornano a incontrare il riflettore. Come mostrato in Figura 4.6 tale intervallo è definito

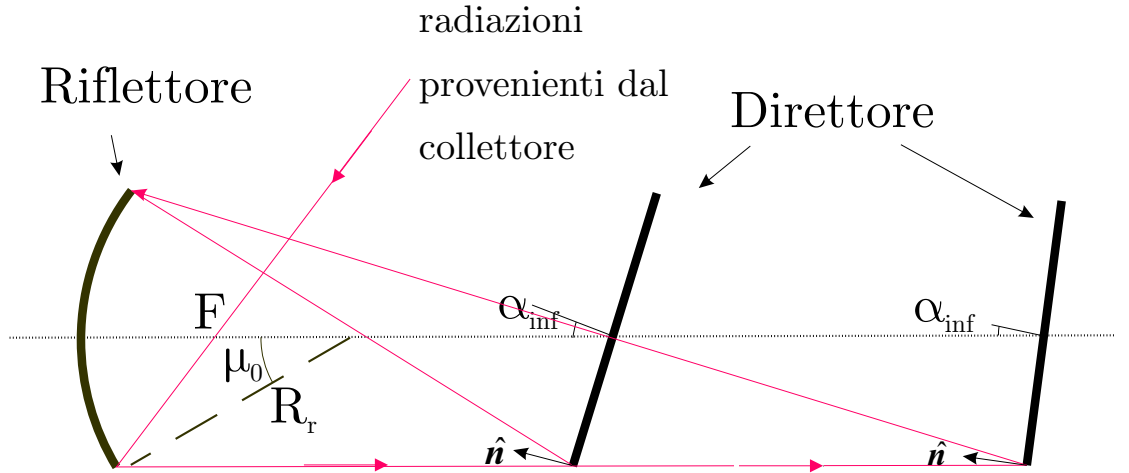
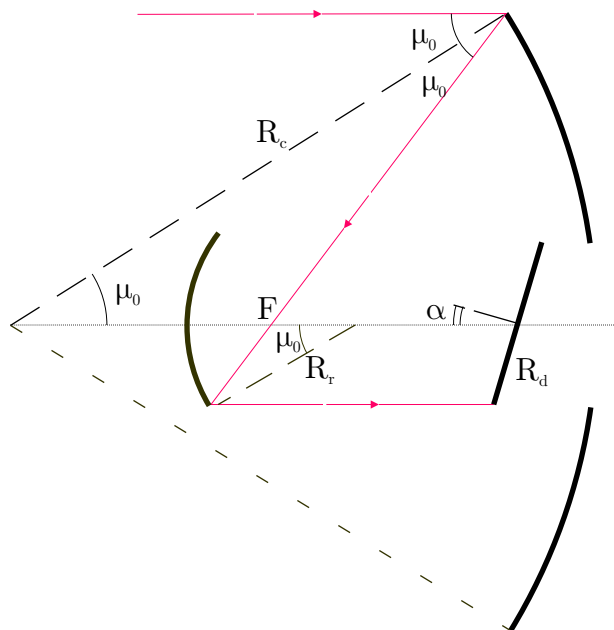


Figura 4.6: interferenza

come *zona di interferenza* ed è del tipo  $\alpha \in [0, \alpha_{int}]$ .

### 4.1.4 Parametri di progetto

I parametri geometrici di progetto scelti sono stati  $R_c$ ,  $\mu_0$  e  $\lambda$ . Il parametro  $\lambda$  è definito come il rapporto tra la superficie del collettore e la superficie



**Figura 4.7:** Angoli caratteristici del Solar Photon Thrustor

bagnata del riflettore, ovvero

$$\lambda \triangleq \frac{2\pi R_c^2(\cos \mu_1 - \cos \mu_0)}{2\pi R_r^2(\cos \mu_1 - \cos \mu_0)} = \frac{R_c^2}{R_r^2} \quad (4.4)$$

Questo rapporto equivale al rapporto dei quadrati dei raggi dei due componenti.

Dall'equazione (4.4) discende la relazione:

$$R_r = \frac{R_c}{\sqrt{\lambda}} \quad (4.5)$$

Definiti i tre parametri di progetto  $R_c$  ,  $\mu_0$  e  $\lambda$  è definita univocamente la geometria del SPT.

Da semplici relazioni geometriche si ricavano  $\mu_1$  e  $R_d$ :

$$\mu_1 = \arcsin \left( \frac{R_r \sin(\mu_0)}{R_c} \right) = \arcsin \left( \frac{\sin(\mu_0)}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad (4.6)$$

ed inoltre:

$$R_d = R_r \sin(\mu_0) \quad (4.7)$$

Tenendo presente la geometria del collettore, la superficie  $S_c$  ha la seguente espressione in funzione dei parametri geometrici di progetto  $\lambda$ ,  $\mu_0$  e  $R_c$ :

$$S_c = 2 \pi R_c^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda - \sin^2 \mu_0}{\lambda}} - \cos \mu_0 \right) \quad (4.8)$$

oppure ricordando la (4.6), tramite brevi passaggi algebrici si può giungere all'espressione più compatta di  $S_c$  funzione di  $\mu_1$ ,  $\mu_0$  e  $R_c$ :

$$S_c = 2 \pi R_c^2 (\cos \mu_1 - \cos \mu_0) \quad (4.9)$$

mentre per quel che riguarda la superficie bagnata del riflettore, anch'essa una zona sferica proporzionale a  $S_c$  si ha:

$$S_r = 2 \pi R_r^2 (\cos \mu_1 - \cos \mu_0) \quad (4.10)$$

Risulta utile infine calcolare anche la superficie bagnata proiettata su un piano perpendicolare all'asse del collettore. Si ha rispettivamente per il collettore e per il riflettore  $S_{c_p}$  e  $S_{r_p}$ :

$$S_{c_p} = \pi R_c^2 (\sin^2 \mu_0 - \sin^2 \mu_1) \quad (4.11)$$

$$S_{r_p} = \pi R_r^2 (\sin^2 \mu_0 - \sin^2 \mu_1) \quad (4.12)$$

## 4.2 Ipotesi semplificative di progetto

Innanzitutto, come già accennato precedentemente si suppone che l'asse del collettore sia perfettamente allineato con la direzione dei raggi solari.

Si presupporre poi che tutti i raggi riflessi specularmente dal riflettore arrivino sempre al direttore, indipendentemente dall'inclinazione del direttore. Quest'ultima è l'ipotesi più importante di questo studio e fondamentale, come verrà poi dettagliatamente esposto, perchè l'SPT abbia vantaggi significativi rispetto alle consuete vele solari.

Si assume trascurabile l'effetto della radiazione solare che arriva dal Sole alla superficie dissipativa del riflettore. Tale superficie ha un coefficiente di riflessione basso, tipicamente  $\rho = 0.09$ , per i materiali comunemente usati per vele solari, e la pressione di radiazione solare agente su questa superficie



è dell'ordine della pressione agente sul collettore, mentre quella che agisce sulla superficie altamente riflettente è circa  $\lambda$  volte le precedenti. La spinta prodotta su questa superficie ha un peso trascurabile rispetto alle altre forze agenti sull'SPT.

Ultima ipotesi di progetto è quella di trascurare i raggi rifratti, ovvero è trascurabile l'effetto dei raggi che non vengono riflessi specularmente dai componenti qualora vadano a investire altre parti del SPT, essendo essi una percentuale molto ridotta per i materiali comunemente usati per le vele solari.

### 4.2.1 Possibili soluzioni

Affinché il direttore possa raccogliere tutto il fascio proveniente dal riflettore, all'aumentare dell'angolo  $\alpha$  dovrebbe crescere la sua superficie, o meglio si dovrebbe utilizzare uno specchio direttore più grande, ma ciò non è possibile, perché in tal modo in alcune posizioni (per  $\alpha$  piccoli) il direttore sarebbe investito da parte delle radiazioni provenienti direttamente dal Sole e metterebbe in ombra parte del collettore.

Una possibile soluzione al problema è quella di traslare il riflettore lungo il suo asse al fine di riflettere i raggi non più paralleli ma convergenti, e farli convogliare completamente allo specchio direttore.

Questa soluzione ha come problema che la superficie dello specchio direttore colpita dai raggi diminuisce all'aumentare dell'angolo  $\alpha$ , tutta l'energia è convogliata in una superficie sempre più piccola, si rischia così di procurare un innalzamento della temperatura di zone del direttore oltre i valori massimi di utilizzo. Sono in via di sviluppo nuovi materiali in microfibre di carbonio rivestite di metalli riflettenti ad alta temperatura di fusione, che resistono ad alte temperature  $2000K$ , realizzati per missioni aventi tratti di percorrenza vicino al Sole. Nel caso di missioni ordinarie che non prevedano passaggi vicini al Sole, con questi nuovi tipi di materiale il problema sopra enunciato è risolto. In ogni caso questa soluzione porta a prevedere un opportuno sistema di movimentazione e controllo dello specchio riflettore che si aggiunge, per quel che riguarda la massa, ai rimanenti sottosistemi di cui la vela composta è costituita.

Per questi motivi (interferenza e diminuzione dell'area proiettata) l'intervallo di variazione ammissibile dell'angolo di controllo  $\alpha$  è più piccolo rispetto

al classico intervallo  $0 - \pi/2$ .

### 4.3 Scelte di progetto

Nel progetto si ipotizza di usare un angolo  $\mu_0$  piccolo, tipicamente assumiamo  $\mu_0 = 15^\circ$ , al fine di ridurre il costo di realizzazione della curvatura del collettore e del riflettore. La curvatura dei due componenti può così esser ottenuta anche grazie all'azione della pressione di radiazione solare sulla vela. Si sceglie infine  $\lambda$  considerando che alti valori di  $\lambda$  comportano un eccessivo riscaldamento, con la conseguente perdita di efficienza del riflettore e del direttore, in quanto una grande quantità di energia raccolta dal collettore viene indirizzata verso delle superfici molto piccole come quelle del riflettore e direttore. Per bassi valori di  $\lambda$  invece il vantaggio di facile manovrabilità dello specchio direttore viene a mancare, per questi motivi il parametro  $\lambda$  viene assunto con un valore compreso nell'intervallo  $[50, 100]$ .

# 5

## Modello Ideale

Lo studio della vela composta SPT con il modello ideale è realizzato considerando la perfetta riflessione del materiale  $\rho = 1$  e le ipotesi esposte nel precedente capitolo. In particolare devono essere tenute presenti le ipotesi fondamentali che i raggi riflessi dal riflettore vanno sempre a incidere sul direttore senza disperdersi nello spazio esterno e che il fascio di fotoni provenienti dal riflettore che giungono al direttore possono considerarsi con buona approssimazione paralleli.

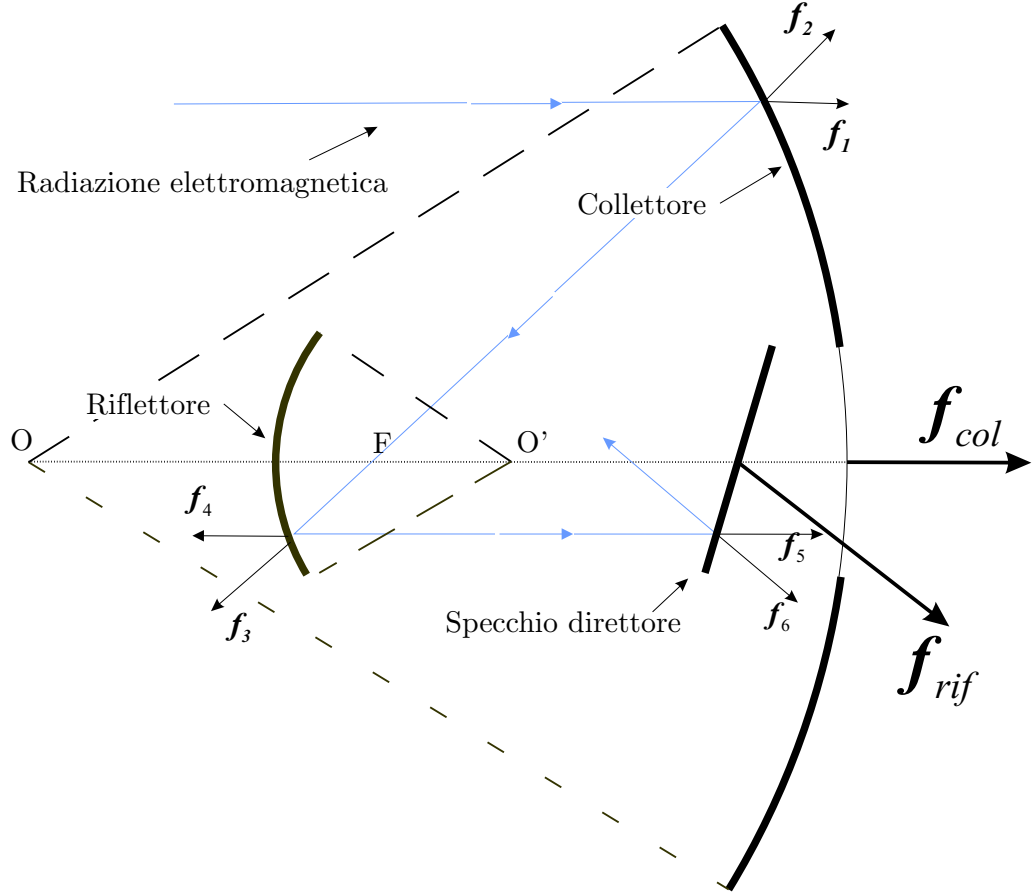
In questo primo modello di studio le radiazioni solari vengono riflesse completamente in modo speculare rispetto alla superficie o porzione di superficie che vanno a bagnare, e non sono tenuti in considerazione i fenomeni di dispersione di energia per effetti termici.

La vela composta è infine considerata non deformabile.

### 5.1 Schema delle forze e spinta risultante

Al fine di giungere all'espressione della spinta complessiva agente sulla vela composta si applica uno studio delle forze agenti su collettore, riflettore e direttore. Tale studio è realizzato considerando il percorso di un fascio di fotoni provenienti dal Sole, dal loro arrivo sulla superficie del collettore, fino al raggiungimento del direttore e la loro emissione nello spazio esterno. Durante tale cammino tale fascio produce delle forze sui componenti del Solar Photon Thruster come mostrato nello schema semplificato della vela composta mostrato in figura 5.1.

Ciascun raggio di radiazione solare colpendo il collettore esercita una forza



**Figura 5.1:** Schema delle forze ideali del SPT

$\mathbf{f}_1$  su di questo, tutte le  $\mathbf{f}_1$  sono nella stessa direzione, parallele all'asse  $x$ . La somma di tutte queste la esprimo con  $\mathbf{f}_{col}$ . Quindi:

$$\sum \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_{coll} \quad (5.1)$$

La  $\mathbf{f}_{coll}$ , considerata la simmetria del collettore, si può considerare applicata al vertice della zona sferica che costituisce il collettore. Quando poi la luce viene riflessa dalla superficie curva del collettore ogni raggio esercita una forza  $\mathbf{f}_2$  sulla vela, queste forze  $\mathbf{f}_2$  non sono tutte nella medesima direzione. Le radiazioni, giunte poi al riflettore, producono le forze  $\mathbf{f}_3$ , anch'esse che variano in direzione a seconda della direzione di provenienza della radiazione. E' importante osservare che per il medesimo raggio di luce vale la seguente relazione:

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_3 \quad (5.2)$$

I fotoni riflessi dal riflettore producono inoltre una forza  $\mathbf{f}_4$ , tutte le  $\mathbf{f}_4$  prodotte dalle varie radiazioni che sopraggiungono al riflettore, sono parallele all'asse del riflettore e collettore.

Infine la luce raggiunge il direttore, e li viene riflessa nello spazio esterno, producendo le forze  $\mathbf{f}_5$  e  $\mathbf{f}_6$ .

Le  $\mathbf{f}_5$  agenti sul direttore sono parallele all'asse  $x$  e sono uguali ma in verso opposto alle  $\mathbf{f}_4$ , quindi per ogni raggio vale l'equazione:

$$\mathbf{f}_4 = -\mathbf{f}_5 \quad (5.3)$$

Lo specchio direttore è costituito da una superficie circolare piana e quindi le  $\mathbf{f}_6$  sono tutte parallele e formano con l'asse  $x$  un angolo pari a  $2\alpha$ , si definisco la somma di tutte le  $\mathbf{f}_6$  con  $\mathbf{f}_{\text{rif}}$ :

$$\sum \mathbf{f}_6 = \mathbf{f}_{\text{rif}} \quad (5.4)$$

Si osserva che i contributi interni delle forze agenti sul Solar Photon Thrustor si annullano perchè le  $\mathbf{f}_2$  si cancellano con le  $\mathbf{f}_3$  e le  $\mathbf{f}_4$  si cancellano con le  $\mathbf{f}_5$ , rimangono quindi le sole  $\mathbf{f}_{\text{col}}$  e  $\mathbf{f}_{\text{rif}}$ .

Poichè  $\rho = 1$  il modulo di  $\mathbf{f}_{\text{col}}$  coincide con quello di  $\mathbf{f}_{\text{rif}}$ .

La  $\mathbf{f}_{\text{col}}$  è la forza esercitata dalla luce raccolta dal collettore e quindi vale la seguente relazione:

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = P S_{c_p} \quad (5.5)$$

dove  $P$  è la pressione di radiazione solare e  $S_{c_p}$  l'area della superficie riflettente del collettore proiettata su un piano perpendicolare all'asse del collettore, nota dalla equazione (4.11).

Sommando le due forze  $\mathbf{f}_{\text{col}}$  e  $\mathbf{f}_{\text{rif}}$  ho l'espressione della spinta complessiva agente sul SPT nel modello ideale:

$$\mathbf{F}_{\text{TOT}} = 2PS_{c_p} \cos \alpha \hat{\mathbf{n}} \quad (5.6)$$

# 6

## Modello Ottico

Parte fondamentale dello studio realizzato è basato sull'applicazione del modello ottico al SPT. Tale modello prende in considerazione la non perfetta riflessione speculare del materiale e gli eventuali effetti termici, ma considera la vela ancora come un corpo non deformabile.

Quest'ultima è una buona approssimazione in quanto la deformazione della vela, prodotta dalla pressione di radiazione solare, può esser utilizzata proprio per realizzare la curvatura desiderata del collettore e del riflettore.

Questo modello si basa sulla teoria del modello ottico, esposto in precedenza, applicato però alla vela piana.

### 6.1 Schema delle forze

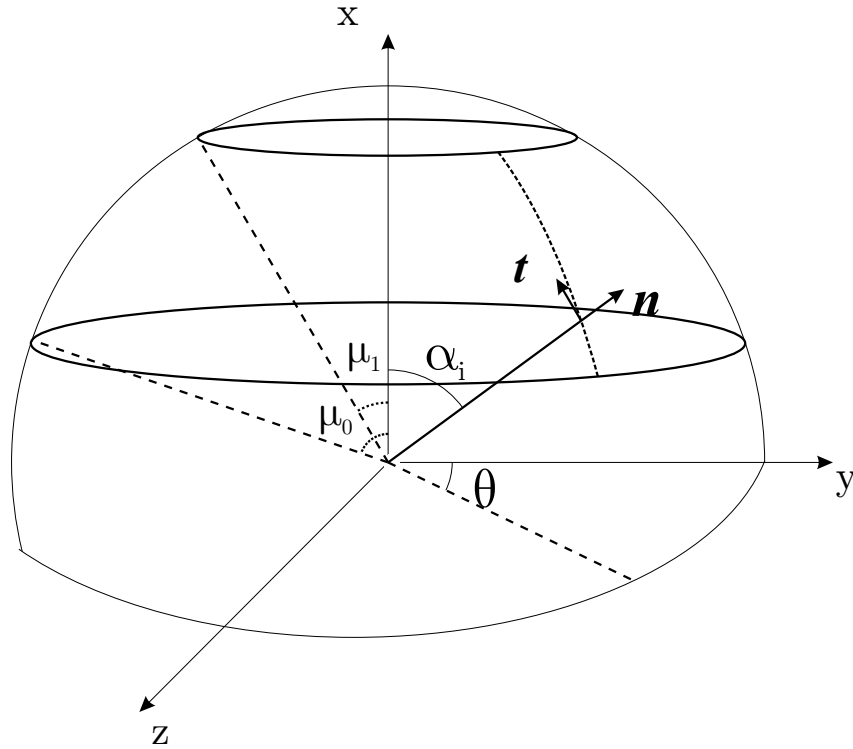
Nel successivi paragrafi sono esplicitate le forze risultanti agenti sui tre componenti fondamentali del SPT ovvero il collettore, il riflettore e lo specchio direttore per effetto della radiazione elettromagnetica solare.

Questo è stato fatto al fine di comprendere meglio la spinta risultante che può essere realizzata da una vela solare convenzionale.

### 6.1.1 Collettore

Al fine di usare la teoria precedentemente esposta della forze agenti su una vela piana nel modello ottico, si è pensato di suddividere il collettore in superfici elementari che sono approssimabili a superfici perfettamente piane. Si procede poi con l'integrazione delle forze applicate a ciascuna area elementare su tutta la superficie della zona sferica. Per il seguente studio è stato introdotto un sistema di riferimento di assi cartesiani rispetto al quale riferire le componenti delle forze e un sistema sferico rispetto al quale integrare le superfici elementari come mostrato in Figura 6.1.

L'origine dei due sistemi di coincide con il centro geometrico della zona



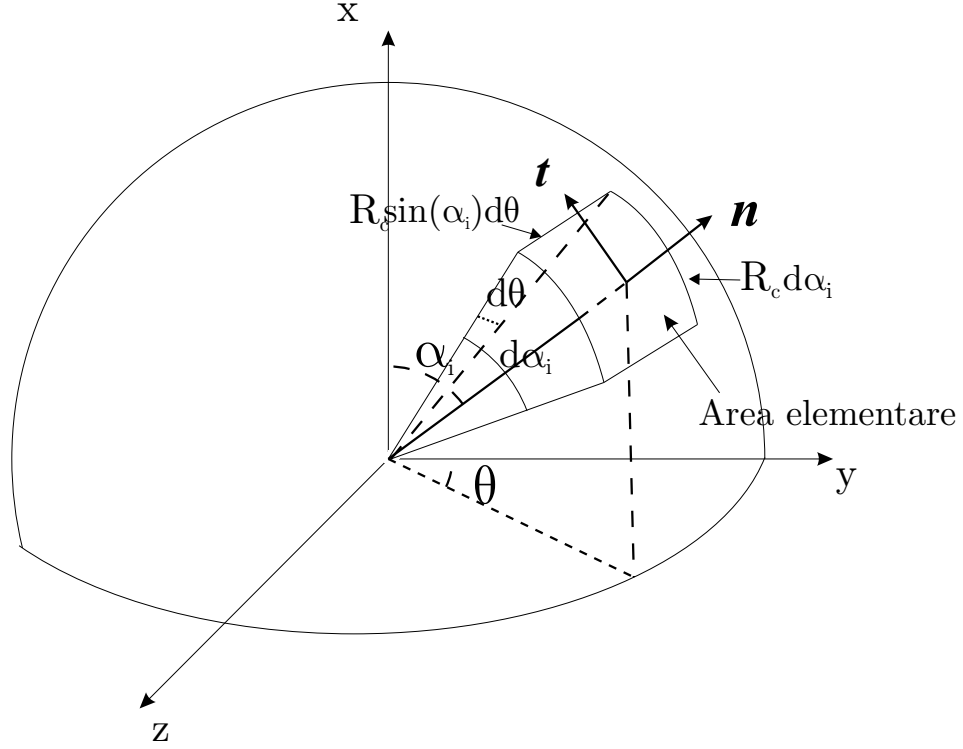
**Figura 6.1:** Sistemi di riferimento adottati per lo studio delle forze agenti sul collettore

sferica del collettore.

La direzione e il verso dell'asse  $x$  coincidono con quelli della propagazione delle radiazioni solari, gli altri assi  $y$  e  $z$  servono per definire completamente il sistema e quindi la forza agente sull'area elementare. Considerata la simmetria assiale del problema, integrando su tutta la superficie del collettore, le componenti della spinta totale lungo gli assi  $y$  e  $z$  sono nulle.

Il sistema di riferimento sferico ha come raggio quello geometrico della zona sferica  $R_c$  e come angoli di riferimento l'angolo  $\alpha_i$  che è proprio il *cone angle* della superficie elementare definito come l'angolo formato dalla normale alla superficie  $\hat{n}$  e la direzione di della radiazione solare  $\hat{i}$ , mentre  $\theta$  detto angolo di *azimut* è compreso tra l'asse  $y$  e la proiezione del vettore posizione dell'area elementare sul piano  $y-z$ .

L'area elementare  $dS$  che viene utilizzata, come mostrato in Figura 6.2, è



**Figura 6.2:** Area elementare

data dall'equazione:

$$dS = R_c^2 \sin \alpha_i d\alpha_i d\theta \quad (6.1)$$

Ricordando l'espressione della spinta generata da una vela piana nel modello ottico data dall'equazione:

$$\mathbf{f} = P A [(\mathcal{A} \cos^2 \alpha_i + \mathcal{B} \cos \alpha_i) \hat{n} + \mathcal{C} \cos \alpha_i \sin \alpha_i \hat{t}] \quad (6.2)$$

per poter scomporre la forza in componenti rispetto al riferimento ortogonale cartesiano, si scrivono le componenti dei vettori  $\hat{n}$  e  $\hat{t}$  lungo gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  :



$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \theta \\ \sin \alpha_i \sin \theta \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha_i \\ -\cos \alpha_i \cos \theta \\ -\cos \alpha_i \sin \theta \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

e quindi le espressioni delle componenti della spinta su una delle superfici elementari del collettore sono date dalle equazioni:

$$df_{x_c} = P_c dS [(\mathcal{A}_c \cos^2 \alpha_i + \mathcal{B}_c \cos^2 \alpha_i) \cos \alpha_i + \mathcal{C}_c \cos \alpha_i \sin^2 \alpha_i] \quad (6.5)$$

$$df_{y_c} = P_c dS [(\mathcal{A}_c \cos^2 \alpha_i + \mathcal{B}_c \cos \alpha_i) \sin \alpha_i \cos \theta - \mathcal{C}_c \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i \cos \theta] \quad (6.6)$$

$$df_{z_c} = P_c dS [(\mathcal{A}_c \cos^2 \alpha_i + \mathcal{B}_c \cos \alpha_i) \sin \alpha_i \sin \theta - \mathcal{C}_c \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i \sin \theta] \quad (6.7)$$

dove sono indicati con  $\mathcal{A}_c$ ,  $\mathcal{B}_c$  e  $\mathcal{C}_c$  i coefficienti che dipendono dal tipo di materiale del collettore, e con  $P_c$  la pressione di radiazione solare sul collettore. La pressione di radiazione  $P_c$  è uguale alla pressione di radiazione solare  $P$  come visto dalla equazione (3.3), quindi

$$P_c = P \quad (6.8)$$

Integrando le forze elementari  $df_{x_c}$ ,  $df_{y_c}$  e  $df_{z_c}$  rispetto a  $\alpha_i$  e  $\theta$  rispettivamente negli intervalli di variazione  $\alpha_i \in [\mu_0, \mu_1]$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , si ricavano le forze complessive agenti sul collettore :  $\mathbf{f}_{x_c}$ ,  $\mathbf{f}_{y_c}$  e  $\mathbf{f}_{z_c}$ .

Data la simmetria del problema si verifica che  $\mathbf{f}_{y_c}$  e  $\mathbf{f}_{z_c}$  sono nulle.

La spinta lungo  $x$  ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{x_c} = & \frac{S_c P}{12} [3\mathcal{A}_c (\cos \mu_0 + \cos \mu_1)(\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1) + \\ & 4\mathcal{B}_c (\cos^2 \mu_0 + \cos \mu_0 \cos \mu_1 + \cos^2 \mu_1) - \\ & 3\mathcal{C}_c (\cos \mu_0 + \cos \mu_1)(\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1) + \\ & 6\mathcal{C}_c (\cos \mu_0 + \cos \mu_1)] \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Si ricordi che con  $S_c$  è identificata la superficie del collettore che è funzione dei parametri geometrici di progetto  $\lambda$ ,  $\mu_0$  e  $R_c$  secondo la relazione (4.8). Tornando a  $\mathbf{f}_{x_c}$ , si osserva dalla precedente equazione (6.9), che la forza sul collettore è funzione delle proprietà termo-ottiche del materiale con cui viene realizzato il collettore tramite i coefficienti  $\mathcal{A}_c$ ,  $\mathcal{B}_c$  e  $\mathcal{C}_c$ , e funzione della pressione di radiazione solare  $P$  e dei tre parametri geometrici di progetto  $\lambda$ ,  $\mu_0$  e  $R_c$ .

E' utile osservare che il rapporto tra l'area del collettore proiettata nella direzione perpendicolare all'asse del collettore, data dalla equazione (4.11), e la superficie del collettore espresso dalla equazione (4.9) non dipende dal raggio del collettore ma esclusivamente dagli angoli caratteristici  $\mu_0$  e  $\mu_1$ . Tale rapporto è espresso dalla seguente:

$$\frac{S_c}{S_{c_p}} = \frac{2}{\cos \mu_1 + \cos \mu_0} \quad (6.10)$$

Dal precedente rapporto, dato dalla equazione (6.10), si può scrivere nuovamente l'espressione di  $\mathbf{f}_{x_c}$  (equazione (6.9)) mettendo in evidenza il termine  $S_{c_p}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{x_c} = & \frac{S_{c_p} P}{6} \left[ 3\mathcal{A}_c (\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1) + \right. \\ & 4\mathcal{B}_c \frac{\cos^2 \mu_0 + \cos \mu_0 \cos \mu_1 + \cos^2 \mu_1}{\cos \mu_1 + \cos \mu_0} + \\ & \left. 3\mathcal{C}_c (\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1 + 2) \right] \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

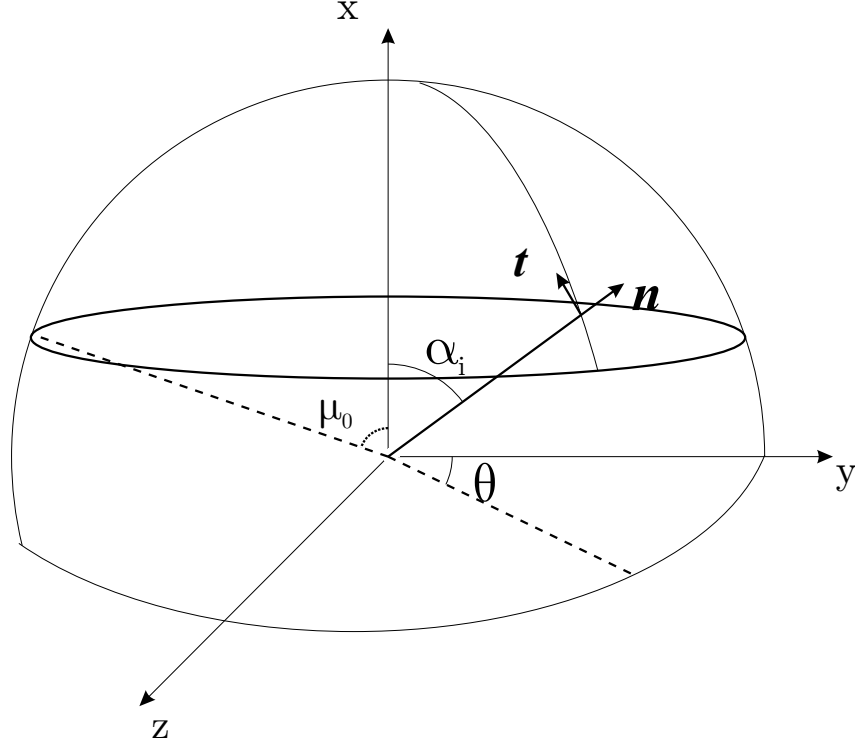
### 6.1.2 Riflettore

Per il riflettore si applica una procedura simile a quella precedentemente esposta per il collettore, definendo una superficie elementare che può essere considerata con buona approssimazione piana, per poter utilizzare la teoria della vela solare piana e poi integrare su tutta la superficie del componente. I sistemi di riferimento utilizzati sono: uno cartesiano che ha come direzione degli assi di riferimento le stesse del sistema cartesiano usato per lo studio delle forze agenti sul collettore, un sistema sferico che ha come raggio il raggio  $R_r$  del riflettore (geometricamente una calotta sferica) e come angoli di riferimento  $\alpha_i$  e  $\theta$  definiti nello stesso modo a gli analoghi utilizzati per lo

studio del collettore.

Per quanto riguarda l'origine dei due sistemi questa coincide con il centro della calotta sferica  $O'$ .

L'area elementare  $dS$  che viene utilizzata è definita dall'equazione:



**Figura 6.3:** Sistemi di riferimento adottati per lo studio delle forze agenti sul riflettore

$$dS = R_r^2 \sin \alpha_i d\alpha_i d\theta \quad (6.12)$$

Usando l'espressione consueta della spinta su vela piana e le stesse scomposizioni dei vettori  $\hat{n}$  e  $\hat{t}$  (equazioni (6.4) e (8.16) ), le espressioni delle componenti della spinta sulla superficie elementare, analogamente al collettore, sono così definite:

$$df_{x_r} = P_r dS [(\mathcal{A}_r \cos^2 \alpha_i + \mathcal{B}_r \cos \alpha_i) \cos \alpha_i + \mathcal{C}_r \cos \alpha_i \sin^2 \alpha_i] \quad (6.13)$$

$$df_{y_r} = P_r dS [(\mathcal{A}_r \cos^2 \alpha_i + \mathcal{B}_r \cos \alpha_i) \sin \alpha_i \cos \theta - \mathcal{C}_r \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i \cos \theta] \quad (6.14)$$

$$df_{z_r} = P_r dS [(\mathcal{A}_r \cos^2 \alpha_i + \mathcal{B}_r \cos \alpha_i) \sin \alpha_i \sin \theta - \mathcal{C}_r \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i \sin \theta] \quad (6.15)$$

dove sono nominati con  $\mathcal{A}_r$ ,  $\mathcal{B}_r$  e  $\mathcal{C}_r$  i coefficienti che dipendono dalle proprietà termo-ottiche del film riflettente utilizzato sul riflettore, e con  $P_r$  la pressione di radiazione solare sul riflettore.

A causa del comportamento reale (ottico) delle superfici riflettenti, sul riflettore giungeranno sia i raggi riflessi specularmente che quelli riflessi in maniera diffusa dal collettore. Supponendo un “buon comportamento” della superficie riflettente del collettore, la frazione dei raggi riflessi specularmente  $s_c$  sarà preponderante rispetto alla frazione dei raggi riflessi in maniera diffusa  $(1 - s_c)$ . Indicando  $\rho_c$  la frazione (rispetto alla totalità dei raggi incidenti) dei raggi riflessi dal collettore si ottiene che la frazione dei raggi riflessi specularmente dal collettore che giungono al riflettore è pari a  $\rho_c s_c$ .

Per uno strato riflettente di Kapton-Alluminio, il valore di  $s_c$  è 0.94 (solo il 6% dei fotoni riflessi viene riflesso in maniera diffusa) mentre quello di  $\rho_c$  è 0.88, ottenendo quindi  $\rho_c s_c = 0.8272$ . Essendo  $(1 - s_c) \ll 1$  ed osservando che il modello analitico si complicherebbe notevolmente considerando anche la frazione dei fotoni riflessa in maniera diffusa, si utilizza la seguente ipotesi semplificativa: si suppone che soltanto i fotoni riflessi specularmente dal collettore vadano ad incidere sul riflettore.

Per calcolare la pressione di radiazione  $P_r$  si ricorre ad un bilancio energetico ricordando il legame esistente in generale tra la pressione di radiazione di un’onda elettromagnetica ed il flusso di energia ad essa associata.

L’energia per unità di tempo (e quindi la potenza) in ingresso al collettore  $W_c$ , ricordando la equazione (3.1) è data dalla relazione:

$$W_c = P S_{c_p} c \quad (6.16)$$

Se vi fosse un comportamento ideale del collettore, questa potenza sarebbe completamente indirizzata nuovamente verso il riflettore. Visto che, come supposto in precedenza, solo i fotoni riflessi specularmente giungono al riflettore la potenza in ingresso al riflettore stesso  $W_r$  soddisfa l’espressione:

$$W_r = \rho_c s_c W_c = P S_{c_p} \rho_c s_c c \quad (6.17)$$

Ricordando che la potenza in ingresso al riflettore può essere anche scritta come

$$W_r = P_r S_{r_p} c \quad (6.18)$$

si ottiene facilmente dalle (6.17)-(6.18) la pressione di radiazione cercata  $P_r$ :

$$P_r = \frac{P S_{c_p} \rho_c s_c}{S_{r_p}} \quad (6.19)$$

Ricordando le definizioni dei coefficienti  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  si trova che:

$$\rho_c s_c = \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \quad (6.20)$$

ne segue che

$$P_r = \frac{P S_{c_p}}{S_{r_p}} \left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) \quad (6.21)$$

Si procede ora all'integrazione delle  $df_{x_r}$ ,  $df_{y_r}$  e  $df_{z_r}$  rispetto a  $\alpha_i$  e  $\theta$  negli stessi intervalli di variazione del collettore  $\alpha_i \in [\mu_0, \mu_1]$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$  perché la superficie investita dai raggi solari non è l'intera calotta sferica ma una zona sferica proporzionale a quella del collettore.

Ricavate quindi le forze complessive agenti sul collettore ( $\mathbf{f}_{x_r}$ ,  $\mathbf{f}_{y_r}$  e  $\mathbf{f}_{z_r}$ ) si verifica la simmetria del problema trovando  $\mathbf{f}_{y_r}$  e  $\mathbf{f}_{z_r}$  nulle.

L'espressione della  $\mathbf{f}_{x_r}$ , analogamente al collettore, è data dalla seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{x_r} = & - \frac{P S_{c_p} S_r}{12 S_{r_p}} \left( \frac{\mathcal{A}_c + \mathcal{C}_c}{2} \right) [3\mathcal{A}_r (\cos \mu_0 + \cos \mu_1)(\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1) + \\ & 4\mathcal{B}_r (\cos^2 \mu_0 + \cos \mu_0 \cos \mu_1 + \cos^2 \mu_1) - \\ & 3\mathcal{C}_r (\cos \mu_0 + \cos \mu_1)(\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1) + \\ & 6\mathcal{C}_r (\cos \mu_0 + \cos \mu_1)] \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Dove con  $S_r$  è indicata la superficie della calotta sferica del riflettore che viene bagnata dai raggi provenienti dal collettore, tale superficie è una zona sferica proporzionale alla superficie del collettore, come esposto nel paragrafo (4.1.4)

$$S_r = \frac{S_c}{\lambda} \quad (6.23)$$

e le loro superfici proiettate nella direzione perpendicolare all'asse sono anch'esse proporzionali:

$$S_{r_p} = \frac{S_{c_p}}{\lambda} \quad (6.24)$$

Dalle due precedenti equazioni si vede facilmente che come avveniva nel collettore il rapporto tra l'area proiettata nella direzione perpendicolare all'asse e la superficie bagnata è ancora:

$$\frac{S_r}{S_{r_p}} = \frac{2}{\cos \mu_1 + \cos \mu_0} \quad (6.25)$$

Sostituendo la (6.25) nella (6.22) dopo brevi semplificazioni algebriche si ricava l'espressione finale della spinta generata dal riflettore:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{x_r} = & -\frac{P S_{c_p}}{6} \left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) [3\mathcal{A}_r (\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1) + \\ & 4\mathcal{B}_r \frac{\cos^2 \mu_0 + \cos \mu_0 \cos \mu_1 + \cos^2 \mu_1}{\cos \mu_1 + \cos \mu_0} + \\ & 3\mathcal{C}_r (\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1 + 2)] \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (6.26)$$

La spinta lungo  $x$  ha direzione opposta a quella del collettore, è funzione del tipo di materiale con cui viene realizzato il riflettore e il collettore, tali dipendenze sono espresse da  $\mathcal{A}_r$ ,  $\mathcal{B}_r$  e  $\mathcal{C}_r$  e da  $\mathcal{A}_c$ ,  $\mathcal{C}_c$ , inoltre la forza dipende dalla pressione di radiazione solare  $P$  e dai tre parametri geometrici di progetto  $\lambda$ ,  $\mu_0$  e  $R_c$  che, come noto, definiscono  $S_{c_p}$  e  $\mu_1$ .

Dalle equazioni (6.11) e (6.26) è utile osservare che nel caso in cui il materiale del collettore sia lo stesso di quello del riflettore sussiste la seguente relazione:

$$\mathbf{f}_{x_r} = -\rho_c S_c \mathbf{f}_{x_c} = -\left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) \mathbf{f}_{x_c} \quad (6.27)$$

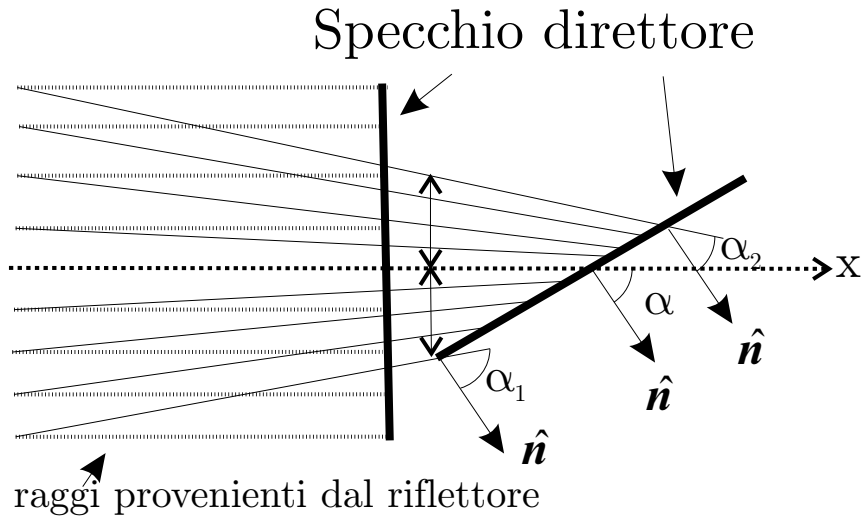
### 6.1.3 Specchio direttore

Lo studio di quest'ultimo componente, detto specchio direttore o più semplicemente direttore, è realizzato come nei precedenti casi utilizzando la teoria bidimensionale del modello ottico per vela piana.

La funzione primaria del direttore è quella di controllare la direzione della spinta fornita dall'SPT.

Ricordando l'ipotesi fondamentale che tutte le radiazioni elettromagnetiche riflesse specularmente dal riflettore vadano a incidere sullo specchio direttore, e ricordando la soluzione di far convogliare i raggi al direttore spostando il riflettore (vedi Par. 4.2.1), segue che l'angolo d'incidenza  $\alpha$ , formato dalla normale alla superficie del direttore e la direzione delle radiazioni solari, non è costante in tutti i vari punti dello specchio direttore, come mostrato in Figura 6.4.

In Figura 6.4 vengono evidenziati i diversi valori di  $\alpha$  in tre diverse locazioni del direttore.

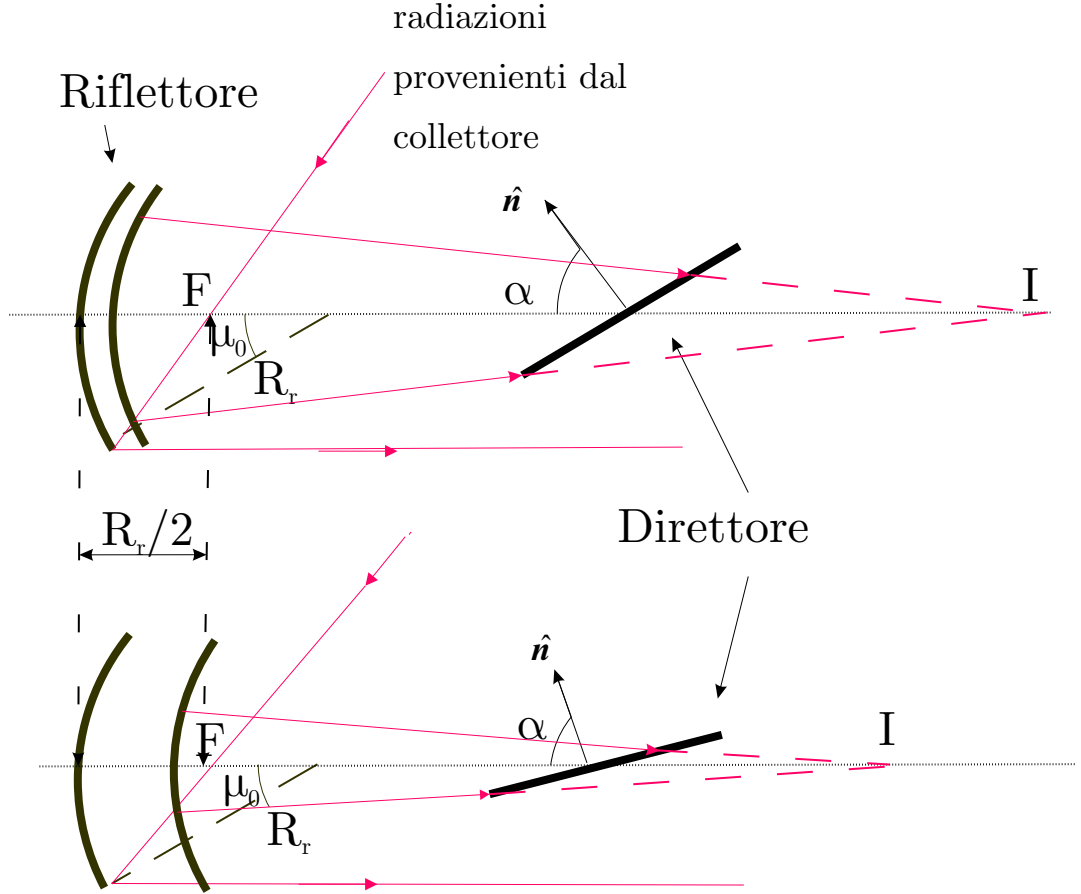


**Figura 6.4:** Variazione degli angoli di incidenza

Spostando il centro geometrico della calotta sferica che costituisce il riflettore lungo l'asse  $x$ , dalla distanza di  $R_r/2$  dal fuoco  $F$  ad una posizione più vicina al collettore, il fascio di radiazione riflesso specularmente dal riflettore da parallelo all'asse  $x$  diviene incidente, per effetto della geometria e dei principi ottici innanzi esposti. Il punto d'incontro  $I$  delle direzioni delle radiazioni appartiene all'asse  $x$  e trasla al variare dello spostamento del riflettore.

Un sistema di controllo attivo deve far un modo che, all'aumentare dell'angolo di controllo tra la normale al direttore e l'asse  $x$ , tale punto  $I$  si avvicini sempre più dal riflettore affinché tutta la radiazione venga accolta dal direttore, come mostrato in Figura 6.5.

Data la simmetria del problema, si osserva dalla Figura 6.5 come la superfi-



**Figura 6.5:** Spostamenti del riflettore  $\alpha$

cie dello specchio direttore che si allontana dal riflettore, in figura la superficie superiore, non venga più bagnata completamente dal fascio. Quest'ultimo effetto è dato dal fatto che il fascio di radiazione non è più un fascio di raggi paralleli.

Al fine di semplificare il modello si è pensato di approssimare il flusso di radiazioni in un fascio di raggi paralleli all'asse  $x$  che vanno a colpire l'intera superficie dello specchio direttore. L'intensità di tale flusso aumenta al crescere dell'angolo d'incidenza  $\alpha$  affinché sia conservata la portata di energia complessiva delle radiazioni, e sia rispettata l'ipotesi fondamentale che tutte le radiazioni riflesse specularmente dal riflettore arrivino al direttore.

Nel modello, essendo la superficie dello specchio direttore piana, e l'angolo d'incidenza costante in tutti i punti dello specchio direttore, non è necessario l'uso di superfici elementari e quindi neanche le relative integrazioni, come è stato fatto per i precedenti componenti del Solar Photon Thruster.



Utilizzando una trattazione bidimensionale viene usato un sistema di riferimento ortogonale i cui assi sono l'asse  $x$  equivalente a quello usato per il collettore, ed un asse  $y$  perpendicolare a  $x$ , e appartenente al piano formato dall'asse  $x$  e dalla normale alla superficie della vela.

Partendo dall'espressione della forza agente su vela piana espressa dall'equazione (3.18), si scompone la forza risultante in due componenti, una lungo l'asse  $x$  una lungo l'asse  $y$ , per far ciò si definiscono i componenti dei versori  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\hat{\mathbf{t}}$  lungo gli assi  $x$  ed  $y$ :

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

Le espressioni dei componenti delle forze agenti sul direttore sono date come noto da:

$$\mathbf{f}_{x_d} = P_d S_d [(\mathcal{A}_d \cos \alpha + \mathcal{B}_d) \cos^2 \alpha + \mathcal{C}_v \sin^2 \alpha \cos \alpha] \hat{\mathbf{i}} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{f}_{y_d} = P_d S_d [(\mathcal{A}_d \cos \alpha + \mathcal{B}_d) \sin \alpha \cos \alpha - \mathcal{C}_d \cos^2 \alpha \sin \alpha] \hat{\mathbf{j}} \quad (6.31)$$

Dove, analogamente ai precedenti casi,  $\mathcal{A}_d$ ,  $\mathcal{B}_d$  e  $\mathcal{C}_d$  sono i coefficienti termottici che dipendono dal materiale del direttore che può essere in generale diverso da quello utilizzato per la realizzazione del collettore o del riflettore,  $P_d$  la pressione sul direttore e  $S_d$  la superficie di quest'ultimo componente del Solar Photon Thruster.

La superficie circolare  $S_d$  si ricava conoscendo  $R_d$ :

$$S_d = R_d^2 \pi \quad (6.32)$$

La pressione di radiazione solare agente sullo specchio direttore si ricava, come si è fatto per il riflettore, da un bilancio energetico. Tale bilancio tiene presente l'ipotesi di non dispersione di radiazioni provenienti dal riflettore ed è fatto tra l'energia che arriva al direttore e quella riflessa specularmente dal riflettore:

$$P_d S_d \cos \alpha = P_r S_{r_p} \rho_r s_r \quad (6.33)$$

Dove con  $\rho_r$  e  $s_r$  si indicano rispettivamente il coefficiente di riflessione e il coefficiente che tiene conto della rifrazione del riflettore, e dove  $S_d \cos \alpha$  è la superficie del direttore proiettata su un piano perpendicolare all'asse del collettore.

Dopo aver ricavato l'espressione di  $\rho_r s_r$  in funzione dei parametri  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  come fatto nell'equazione (6.20) per  $\rho_c s_c$  e, ricordando l'espressione di  $P_r$  data da (6.21), tramite semplici passaggi algebrici si giunge alla seguente espressione di  $P_d$ :

$$P_d = \frac{P S_{c_p}}{S_d \cos \alpha} \left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) \left( \frac{\mathcal{A}_r - \mathcal{C}_r}{2} \right) \quad (6.34)$$

Sostituendo  $P_d$  nelle equazioni (6.30) e (6.31) ne seguono le equazioni dei componenti della spinta agente sul direttore:

$$\mathbf{f}_{x_d} = P S_{c_p} \left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) \left( \frac{\mathcal{A}_r - \mathcal{C}_r}{2} \right) [(\mathcal{A}_d \cos \alpha + \mathcal{B}_d) \cos \alpha + \mathcal{C}_v \sin^2 \alpha] \hat{\mathbf{i}} \quad (6.35)$$

$$\mathbf{f}_{y_d} = P S_{c_p} \left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) \left( \frac{\mathcal{A}_r - \mathcal{C}_r}{2} \right) [(\mathcal{A}_d \cos \alpha + \mathcal{B}_d) \sin \alpha - \mathcal{C}_d \cos \alpha \sin \alpha] \hat{\mathbf{j}} \quad (6.36)$$

Si osserva l'analogia tra le due precedenti equazioni e le espressioni delle componenti della spinta, per il modello ottico, su una qualsiasi vela piana date dalle equazioni:

$$\mathbf{f}_x = P_v S_v \cos \alpha [(\mathcal{A}_v \cos \alpha + \mathcal{B}_v) \cos \alpha + \mathcal{C}_v \sin^2 \alpha] \hat{\mathbf{i}} \quad (6.37)$$

$$\mathbf{f}_y = P_v S_v \cos \alpha [(\mathcal{A}_v \cos \alpha + \mathcal{B}_v) \sin \alpha - \mathcal{C}_v \cos \alpha \sin \alpha] \hat{\mathbf{j}} \quad (6.38)$$

dove sono nominati con  $\mathcal{A}_v$ ,  $\mathcal{B}_v$  e  $\mathcal{C}_v$  i coefficienti che dipendono dal tipo di materiale di realizzazione della vela, con  $P_v$  la pressione di radiazione solare sulla vela, e con  $S_v$  la superficie della vela.

I termini dentro parentesi quadre sono gli stessi se la generica vela è costituita dal medesimo materiale del direttore. Sulla vela generica agisce poi una pressione  $P_v$  mentre nel direttore per effetto delle perdite avvenute nei precedenti componenti agisce una pressione  $P \left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) \left( \frac{\mathcal{A}_r - \mathcal{C}_r}{2} \right)$ .

Nelle equazioni (6.37) e (6.38) è messo in evidenza il prodotto  $S_v \cos \alpha$ , questo rappresenta l'effettiva area di raccolta dei raggi della generica vela solare, ovvero la proiezione della superficie della vela su un piano normale ai raggi al variare di  $\alpha$ , mentre per il direttore abbiamo la superficie proiettata

del collettore  $S_{c_p}$ .

Per spiegare questa differenza si osserva che normalmente, quando una generica vela piana è perpendicolare ai raggi, raccoglie il massimo flusso energetico perchè l'area effettiva di raccolta  $S_v \cos \alpha$  è massima ovvero è  $S_v$  essendo  $\alpha = 0$ . Quando la vela si inclina rispetto alle radiazioni elettromagnetiche, il flusso energetico raccolto da questa decresce, questo avviene perchè diminuisce l'area effettiva di raccolta.

Nel caso del direttore, per effetto dell'ipotesi di non dispersione dei raggi, questo raccoglie sempre il massimo valore del flusso energetico al variare di  $\alpha$ , e quindi tale ipotesi fa scomparire la dipendenza dal coseno di  $\alpha$ , portando nella sua espressione il termine  $S_{c_p}$  che non dipende da  $\alpha$ .

Questa trattazione è valida per angoli  $\alpha$  non troppo vicini all'intorno di  $\pi/2$ , questo perché in tale intorno la superficie di raccolta tende a zero mentre l'intensità di radiazione tende a infinito, producendo di conseguenza una spinta finita che in realtà non si verifica. Non è infatti fisicamente possibile far convogliare tutti i raggi dal riflettore alla superficie del direttore se quest'ultima è quasi parallela all'asse  $x$ .

## 6.2 Nuovo sistema di riferimento

A questo punto del lavoro si è passati dal sistema di riferimento bidimensionale descritto nel paragrafo (3.2) ad uno tridimensionale dove sono stati nominati in uguale modo gli angoli di controllo. E' stata utilizzata una terna di riferimento eliocentrica eclittica rispetto a cui si definiranno le equazioni del moto, ed una terna orbitale riferita al sistema vela per evidenziare e poter esprimere gli angoli di controllo (Figura 6.6).

L'angolo  $\alpha$  è ancora il *cone angle* della vela solare ovvero rappresenta l'angolo tra la direzione di propagazione dei raggi solari e la normale alla superficie del direttore. L'angolo  $\delta$ , detto *clock angle*, è l'angolo tra la proiezione della normale sul piano ortogonale alla direzione dei raggi solari e l'asse  $y$  orientato verso il nord solare.

Il terzo angolo  $\tau$  è ancora l'angolo di spinta, ovvero l'angolo tra la direzione della forza risultante (propulsiva)  $\mathbf{F}_{TOT}$ , e quella dei raggi solari  $\hat{\mathbf{i}}$ , ed è necessario per definire in modo completo il nostro sistema nell'applicazione del

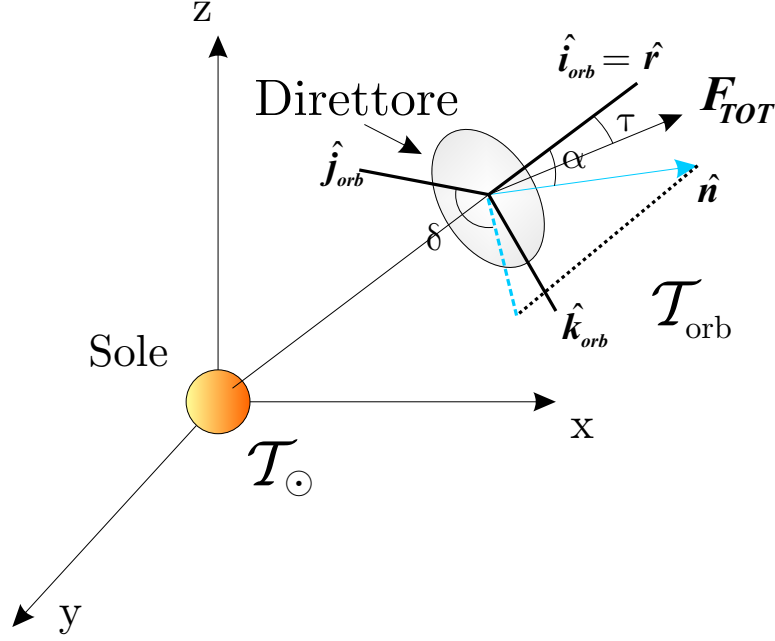


Figura 6.6: Terne di riferimento

modello di vela non ideale.

### 6.3 Spinta risultante del modello

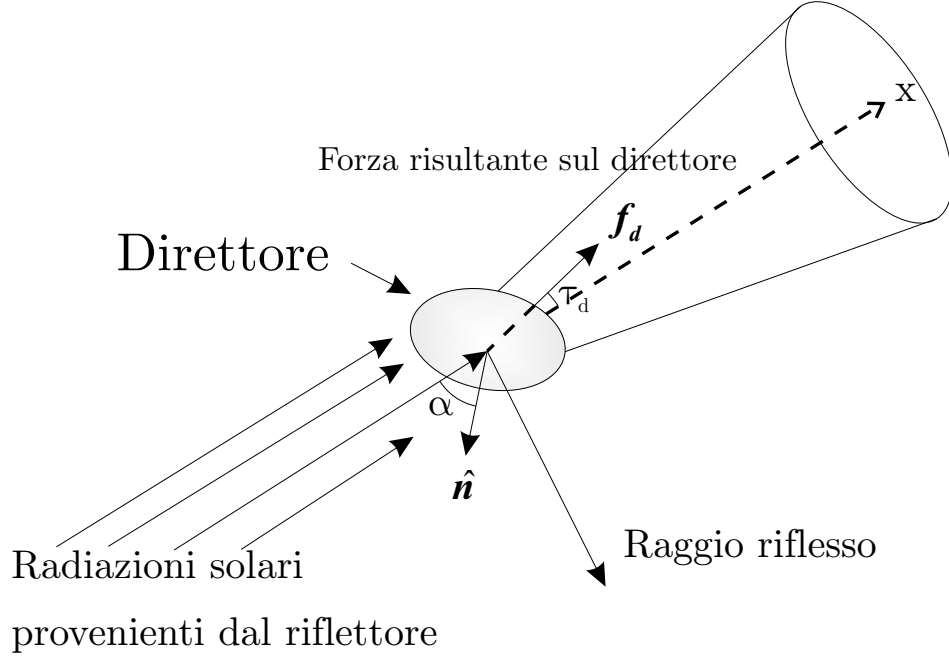
Sono state studiate fino a questo punto le forze agenti sui tre componenti principali del Solar Photon Thrustor, collettore, riflettore e direttore. Sommando i vettori di tale forze si giunge all'espressione della spinta risultante data dalla vela solare:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{TOT} &= \mathbf{f}_{x_c} + \mathbf{f}_{x_r} + \mathbf{f}_{x_d} + \mathbf{f}_{y_d} = \mathbf{f}_{x_c}(1 - \rho_c s_c) + \mathbf{f}_{x_d} + \mathbf{f}_{y_d} = \\ &= \mathbf{f}_{x_c} \left( 1 - \left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) \right) + \mathbf{f}_{x_d} + \mathbf{f}_{y_d} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Il contributo del collettore alla spinta è diretto lungo l'asse delle radiazione solari  $x$ , nello stesso verso di percorrenza della propagazione dei raggi provenienti dal Sole, mentre il riflettore produce una spinta nella stessa direzione del collettore ma in verso opposto. Infine il direttore può orientare la forza risultante  $\mathbf{f}_d$  dove:

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{f}_{x_d} + \mathbf{f}_{y_d} \quad (6.40)$$

in una direzione compresa all'interno di un angoloide che ha come asse centrale l'asse  $x$  (Vedi Figura 6.7). L'ampiezza massima di tale angoloide di-



**Figura 6.7:** Angoloide di spinta

pende dal tipo di materiale con cui è realizzato lo specchio direttore. In figura 6.7 è indicato con  $\tau_d$  l'angolo tra la direzione delle radiazioni solari e la direzione della forza agente sul direttore.

Per arrivare a una formulazione più compatta della  $\mathbf{F}_{\text{TOT}}$  si definisce per brevità la variabile  $K_1$  che dipende dal materiale di costruzione nonché dalla geometria del collettore e riflettore e la variabile  $K_2$  che dipende unicamente dalle proprietà termo-ottiche dei materiali di realizzazione della vela composta:

$$\begin{aligned}
 K_1 \triangleq & \frac{1}{6} \left[ 3 \left( \mathcal{A}_c - \frac{\mathcal{A}_c \mathcal{A}_r - \mathcal{C}_c \mathcal{A}_r}{2} \right) (\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1) + \right. \\
 & 4 \left( \mathcal{B}_c - \frac{\mathcal{A}_c \mathcal{B}_r - \mathcal{C}_c \mathcal{B}_r}{2} \right) \frac{\cos^2 \mu_0 + \cos \mu_0 \cos \mu_1 + \cos^2 \mu_1}{\cos \mu_0 + \cos \mu_1} + \quad (6.41) \\
 & \left. 3 \left( \mathcal{C}_c - \frac{\mathcal{A}_c \mathcal{C}_r - \mathcal{C}_c \mathcal{C}_r}{2} \right) (\cos^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_1 + 2) \right]
 \end{aligned}$$

$$K_2 \triangleq \left( \frac{\mathcal{A}_c - \mathcal{C}_c}{2} \right) \left( \frac{\mathcal{A}_r - \mathcal{C}_r}{2} \right) \quad (6.42)$$

Ricorrendo alle espressioni precedentemente ricavate (6.11) (per il collettore), (6.26) (per il riflettore) e le (6.35) (6.36) (per il direttore) e alle definizioni di  $K_1$  e  $K_2$  si ottiene la forma compatta della spinta totale rispetto al sistema di riferimento ortogonale con versori  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{TOT}} = & S_{c_p} P \left[ K_1 + K_2 [(\mathcal{A}_d - \mathcal{C}_d) \cos^2 \alpha + \mathcal{B}_d \cos \alpha + \mathcal{C}_d] \right] \hat{\mathbf{i}} \\ & + [K_2 [(\mathcal{A} - \mathcal{C}) \cos \alpha + \mathcal{B}] \sin \alpha] \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Passando invece al sistema non ortogonale avente versori  $\hat{\mathbf{i}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  dopo alcuni passaggi algebrici l'espressione di  $\mathbf{F}_{\text{TOT}}$  appare ancora più compatta:

$$\mathbf{F}_{\text{TOT}} = S_{c_p} P \left[ (K_1 + K_2 \mathcal{C}_d) \hat{\mathbf{i}} + (K_2 (\mathcal{A}_d - \mathcal{C}_d) \cos \alpha + K_2 \mathcal{B}_d) \hat{\mathbf{n}} \right] \quad (6.44)$$

Ponendo infine per brevità di scrittura i seguenti coefficienti:

$$D_1 \triangleq K_1 + K_2 \mathcal{C}_d \quad (6.45)$$

$$D_2 \triangleq K_2 (\mathcal{A}_d - \mathcal{C}_d) \quad (6.46)$$

$$D_3 \triangleq K_2 \mathcal{B}_d \quad (6.47)$$

ne deriva una elegante espressione della forza totale sul SPT secondo il modello ottico esposto:

$$\mathbf{F}_{\text{TOT}} = S_{c_p} P \left[ D_1 \hat{\mathbf{i}} + (D_2 \cos \alpha + D_3) \hat{\mathbf{n}} \right] \quad (6.48)$$

L'equazione (6.48), è estremamente compatta e costituisce un nuovo risultato nello studio delle vele solari.

I coefficienti di forza  $D_2$  e  $D_3$  dipendono esclusivamente dalle proprietà ottiche del materiale riflettente mentre  $D_1$  dipende anche dalla geometria del collettore attraverso  $K_1$ .

Si osservi infine come nel caso ideale si abbia  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 2$  e  $D_3 = 0$  fornendo quindi esattamente la relazione (5.6).

### 6.3.1 Dipendenze della spinta

Lo studio del Solar Photon Thrustor tramite il modello ottico ha portato alla formulazione della spinta complessiva espressa in maniera compatta tramite l'equazione (6.48), ma alla base di tale formulazione l'espressione della spinta ottenibile con la vela composta SPT dipende da i consueti parametri sotto riportati:

- I parametri che caratterizzano il tipo di materiale usato per il collettore  $\mathcal{A}_c$ ,  $\mathcal{B}_c$  e  $\mathcal{C}_c$ , per il riflettore  $\mathcal{A}_r$ ,  $\mathcal{B}_r$  e  $\mathcal{C}_r$  e per il direttore  $\mathcal{A}_d$ ,  $\mathcal{B}_d$  e  $\mathcal{C}_d$
- La geometria del Solar Photon Thrustor  $\lambda, \mu_0, R_c$
- L'angolo di incidenza  $\alpha$

Nel caso in cui il materiale riflettente utilizzato per i tre componenti sia il medesimo, si può porre nelle equazioni (6.11) (per il collettore), (6.26) (per il riflettore) e le (6.35) (6.36) (per il direttore) le seguenti:

$$\mathcal{A}_c \equiv \mathcal{A}_r \equiv \mathcal{A}_d = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B}_c \equiv \mathcal{B}_r \equiv \mathcal{B}_d = \mathcal{B}$$

$$\mathcal{C}_c \equiv \mathcal{C}_r \equiv \mathcal{C}_d = \mathcal{C}$$

ottenendo i coefficienti:

$$\begin{aligned} K'_1 \triangleq & \left( \frac{2 - \mathcal{A} + \mathcal{C}}{12} \right) \left[ 3 \left( \frac{\mathcal{A} - \mathcal{C}}{2} \right) (\cos^2 \mu_0 - \cos^2 \mu_1) + \right. \\ & 4\mathcal{B} \frac{\cos^2 \mu_0 + \cos \mu_0 \cos \mu_1 + \cos^2 \mu_1}{\cos \mu_0 + \cos \mu_1} + \\ & \left. 3\mathcal{C}(\cos^2 \mu_0 - \cos^2 \mu_1 + 2) \right] \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$K'_2 \triangleq \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})^2}{4} \quad (6.50)$$

da cui ne segue:

$$D'_1 \triangleq K'_1 + K'_2 \mathcal{C}_d \quad (6.51)$$

$$D'_2 \triangleq K'_2 (\mathcal{A} - \mathcal{C}) \quad (6.52)$$

$$D'_3 \triangleq K'_2 \mathcal{B} \quad (6.53)$$

dove l'apice (') è stato utilizzato per indicare i coefficienti in cui vengono utilizzati i medesimi materiali sui tre componenti del Solar Photon Thruster.

Utilizzando il medesimo materiale, il Kapton - Alluminio, per tutti i componenti della vela composta, l'espressione della spinta appare poco sensibile alle variazioni di  $\lambda$  nell'intervallo  $[50,100]$ , definiamo quindi  $\lambda = 100$  come suggerito da Forward.

Abbiamo assunto come valore del parametro  $\mu_0$ , come descritto nel paragrafo 3.1, un angolo di apertura di  $15^\circ$ .

Stabiliti quindi i valori di  $\mu_0$  e  $\lambda$ , è interessante osservare che l'ultimo parametro geometrico  $R_c$  diviene la grandezza caratteristica che definisce le dimensioni complessive della vela, tale parametro viene scelto conoscendo la spinta massima richiesta e il peso massimo del sistema di propulsione a vela solare che può esser portato in orbita per la specifica missione.

## 6.4 Forza radiale e forza normale

Stabilito di utilizzare il medesimo materiale per tutti i componenti della vela composta (Kapton - Alluminio), e definiti i parametri caratteristici del SPT ( $\lambda = 100$ ,  $\mu_0 = 15^\circ$ ) è interessante osservare l'andamento dei componenti della spinta al variare dell'angolo di controllo  $\alpha$ . Si ricordi che  $\alpha$  è l'angolo compreso tra la normale al direttore e la direzione di propagazione delle radiazioni solari che coincide con l'asse  $x$ . In particolare si è approfondito lo studio sul componente della spinta lungo l'asse  $x$  che definiremo come 'forza radiale' e il componente della forza complessiva perpendicolare a quest'ultimo che definiremo come 'forza normale'.

Si vanno inizialmente a raggruppare i componenti delle forze lungo l'asse  $x$  agenti su collettore, riflettore e direttore da cui si ricava l'andamento del modulo della forza complessiva agente lungo quest'asse dalla semplice



equazione:

$$F_x = |\mathbf{f}_{x_c}| - |\mathbf{f}_{x_r}| + |\mathbf{f}_{x_d}| \quad (6.54)$$

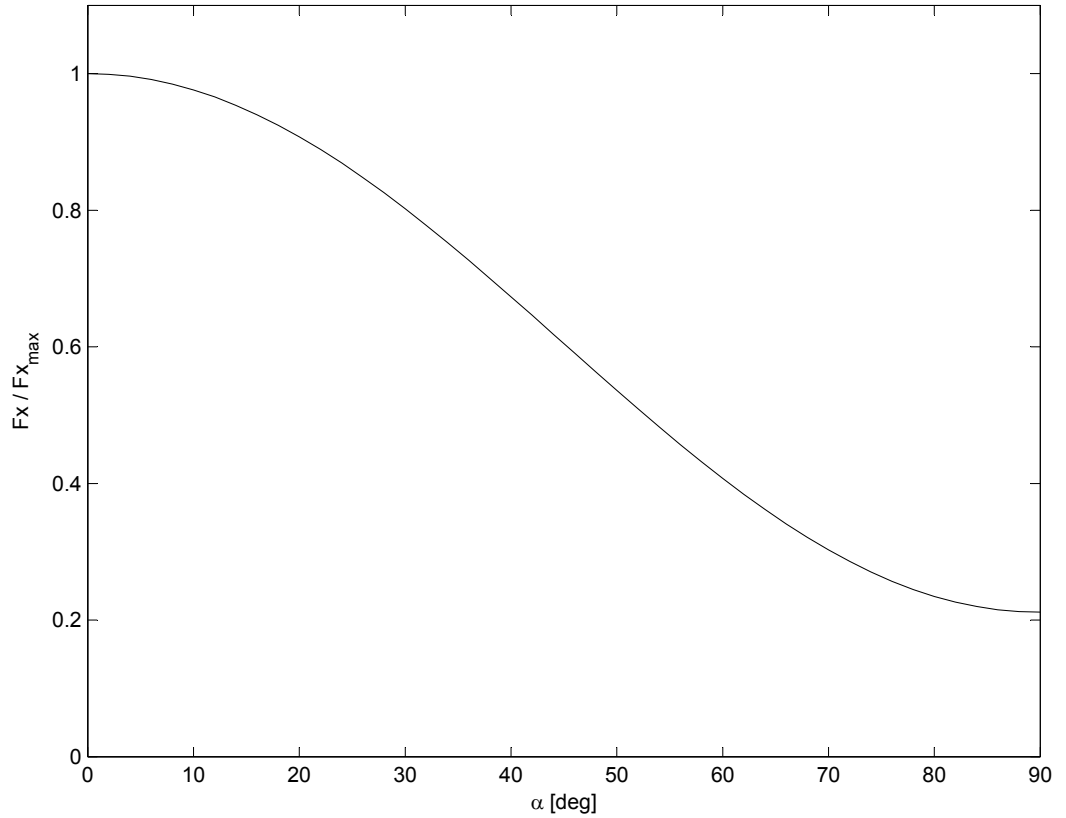
o più semplicemente:

$$F_x = \left(1 - \frac{2 - \mathcal{A} + \mathcal{C}}{2}\right) |\mathbf{f}_{x_c}| + |\mathbf{f}_{x_d}| \quad (6.55)$$

dove è indicato con  $F_x$  il modulo della forza radiale ovvero della spinta complessiva lungo l'asse del collettore.

Stabilita la geometria del Solar Photon Thruster, si osserva che l'andamento di  $F_x$  dipende da un contributo costante  $\left(\left(1 - \frac{2 - \mathcal{A} + \mathcal{C}}{2}\right) |\mathbf{f}_{x_c}| \right)$  e da una funzione dell'angolo di controllo  $\alpha$  ( $|\mathbf{f}_{x_d}|$ ).

Nella figura 6.8 è stato adimensionato il valore di  $F_x$  mettendo sull'asse delle



**Figura 6.8:** Spinta lungo l'asse x

variare dell'angolo di controllo  $\alpha$ .

E' fondamentale osservare che tale spinta non si annulla mai, neppure quando la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  al direttore è ortogonale alla direzione di propagazione di radiazione  $\hat{\mathbf{i}}$  ovvero per  $\alpha = \pi/2$ , questo avviene per effetto del contributo costante  $((1 - \rho s) |\mathbf{f}_{xc}|)$ .

Tale contributo costante deriva dal fatto che la forza applicata al collettore è maggiore di quella sul riflettore perchè parte dei fotoni giunti al collettore non vengono riflessi specularmente al riflettore, non arrivando quindi a quest'ultimo, disperdono parte dell'energia utilizzabile dal riflettore.

Si deduce che il suddetto modello di vela composta non può viaggiare con la sola forza d'inerzia ma risentirà sempre di una forza diretta lungo l'asse di propagazione dei raggi solari.

Dei tre componenti del Solar Photon Thrustor è noto che soltanto il direttore dá un contributo alla spinta in una delle direzioni ortogonali all'asse  $x$ . Definito  $F_y$  il modulo di tale spinta ortogonale a  $\hat{\mathbf{i}}$  vale la seguente relazione:

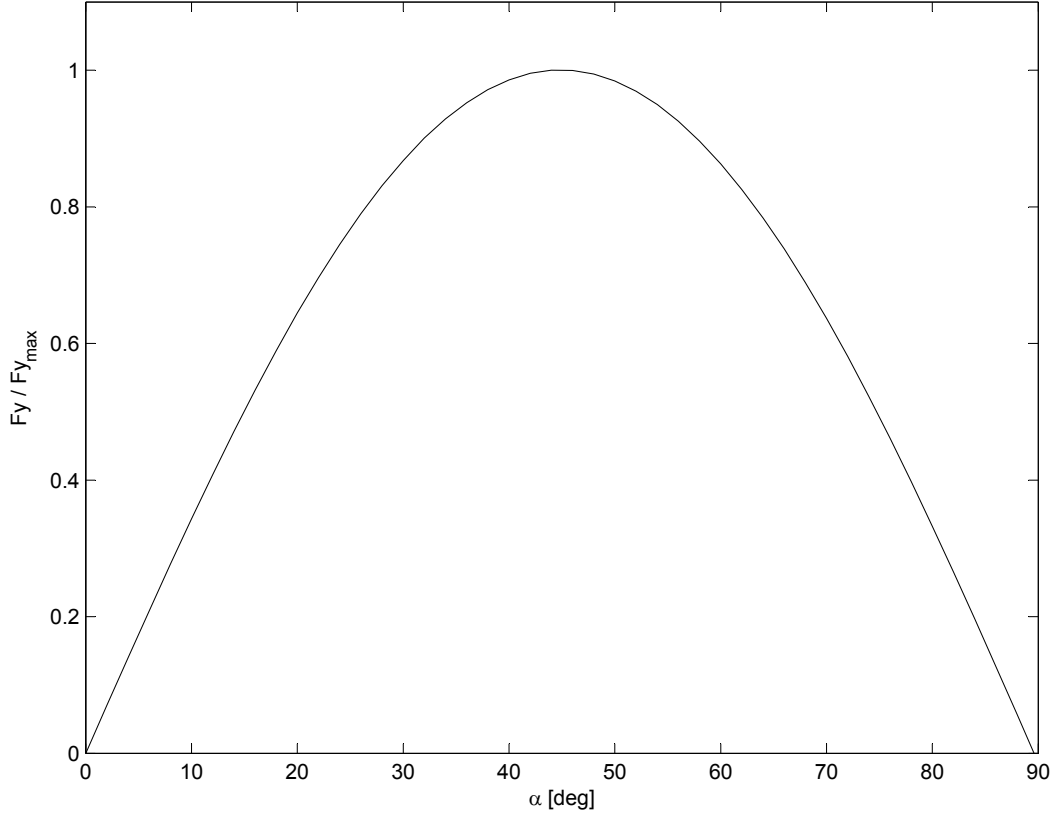
$$F_y = |\mathbf{f}_{yd}| \quad (6.56)$$

Viene riportato nel grafico di figura 6.9 l'andamento di  $F_y$  o più precisamente l'andamento del suo valore adimensionato, ovvero  $F_y/F_{y_{\max}}$ .

L'andamento di  $F_y/F_{y_{\max}}$  è di tipo sinusoidale con il massimo per  $\alpha = \pi/4$ . Grazie all'orientamento della  $F_y$  si può direzionare la spinta complessiva dell'apparato propulsivo costituito dalla suddetta vela composta.

## 6.5 Angolo di spinta $\tau$

Viene definito con  $\tau$  l'angolo di spinta del Solar Photon Thrustor, come si nota in figura 6.10,  $\tau$  è l'angolo compreso tra la direzione dei raggi solari  $\hat{\mathbf{i}}$  e la direzione della spinta complessiva  $\mathbf{F}_{\text{TOT}}$  agente sulla vela composta. Come accade nel modello ottico bidimensionale della vela piana, anche nel modello ottico del SPT il valore dell'angolo di controllo  $\alpha$  tra la normale alla superficie del direttore  $\hat{\mathbf{n}}$  e la direzione dei raggi solari  $\hat{\mathbf{i}}$  non coincide con il valore dell'angolo di spinta  $\tau$ . L'angolo  $\tau$  è compreso all'interno di un angoloide (Vedi figura 6.10) la cui ampiezza massima dipende dal tipo di materiale utilizzato e dalla geometria del SPT.



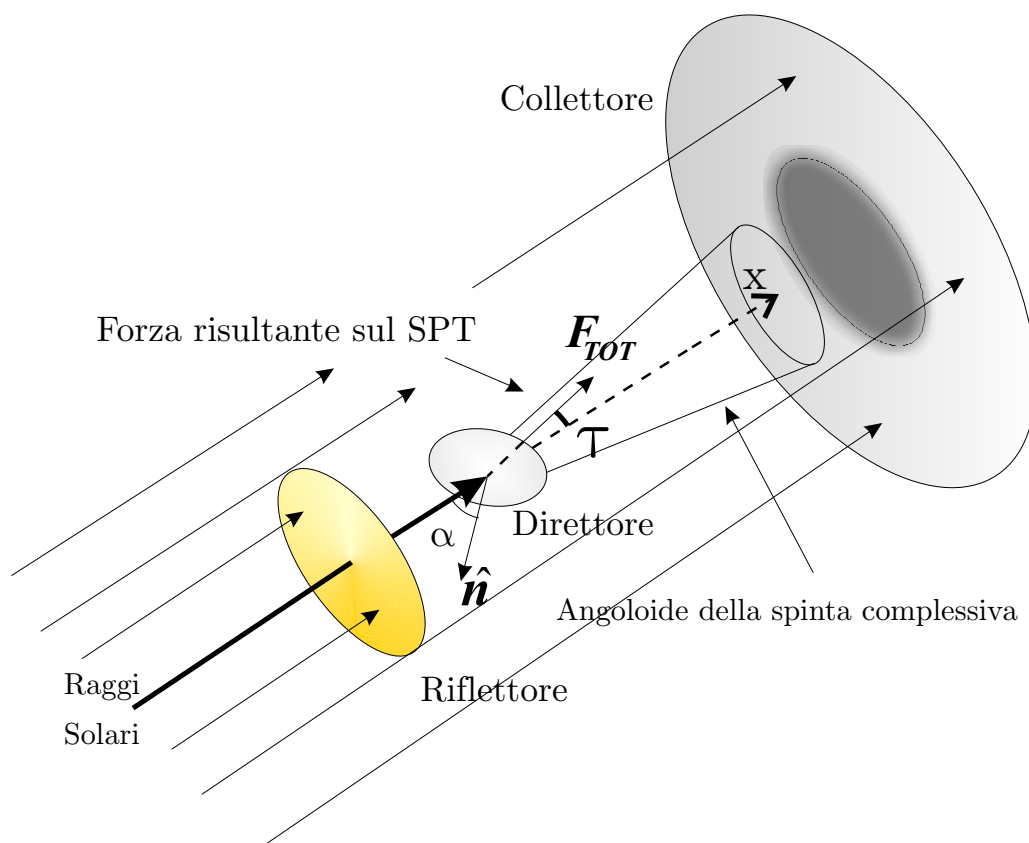
**Figura 6.9:** Spinta lungo un asse ortogonale a x

Note le espressioni di  $F_x$  e  $F_y$  funzioni di  $\alpha$ , dalla relazione:

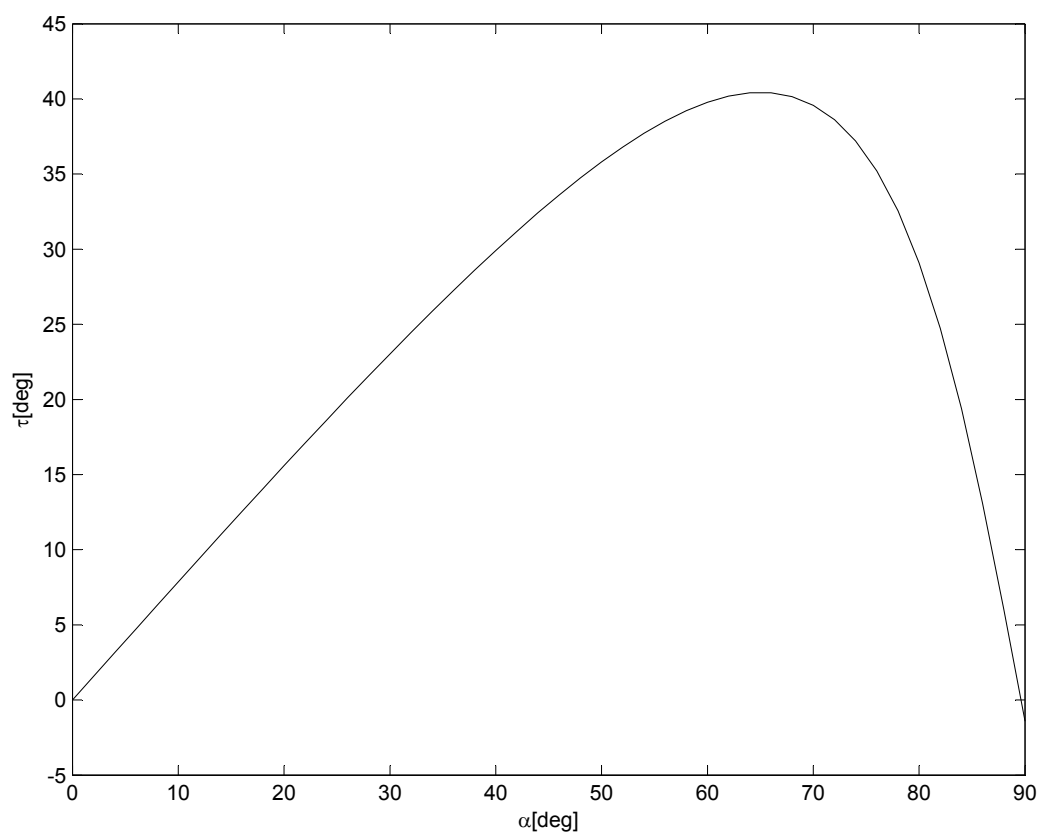
$$\tau = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \quad (6.57)$$

si può tracciare il grafico relativo all'andamento di  $\tau$  al variare di  $\alpha$  (Figura 6.11) per il Solar Photon Thrustor ( $\lambda = 100$  ,  $\mu = 15^\circ$  , Materiale dei componenti Kapton-Al).

L'angolo di spinta  $\tau$  del SPT ha un cono di apertura massima di circa  $40^\circ$ . Nel modello ideale invece  $\tau$  coincide con  $\alpha$  e l'apertura massima del suo cono è  $90^\circ$ .



**Figura 6.10:** Angolo di spinta



**Figura 6.11:** Angolo di spinta

# 7

## Confronto tra modelli

Dopo aver illustrato in dettaglio le spinte agenti sulla vela piana e sulla vela composta SPT, nel modello di vela ideale e nel modello ottico, vengono di seguito confrontate le varie spinte ottenibili da questi sistemi propulsivi.

Si ricordano sommariamente i valori dei parametri geometrici caratteristici del Solar Photon Thrustor utilizzato per i confronti sono:

- Rapporto tra Sup. Collettore e Sup. Riflettore  $\lambda = 100$
- Angolo di apertura  $\mu_0 = 15^\circ$

L'SPT conserva inoltre le medesime ipotesi semplificative fatte nei precedenti paragrafi e cioè:

- La non dispersione dei raggi provenienti dal riflettore
- I raggi che raggiungono il direttore sono considerati paralleli
- Sono trascurabili gli effetti dei raggi che vanno a colpire la superficie dissipativa del riflettore
- Sono trascurabili gli effetti di eventuali raggi riflessi in maniera diffusa

infine il materiale utilizzato per la realizzazione di ciascun componente del SPT è lo stesso di quello di cui è costituita la vela piana ( Kapton - Al ).

### 7.1 SPT - Vela piana

Iniziamo il confronto tra il Solar Photon Thrustor e la vela solare piana. Quest'ultima è tipicamente una vela quadrata stabilizzata a tre assi o una

vela circolare stabilizzata a spin.

In entrambi i casi che verranno descritti le deformazioni delle vele per effetto della radiazione solare non sono tenute in considerazione.

### 7.1.1 Modello ideale

Si ricordi che nel modello ideale il coefficiente di riflessione  $\rho$  è pari a 1, la riflessione è perfettamente speculare, e la forza agente su ciascuna area elementare è diretta secondo la normale a questa superficie.

Le espressioni delle spinte risultanti agenti sulla vela piana e sul SPT sono:

$$\mathbf{f}_{\text{Piana}} = 2PS \cos^2 \alpha \hat{\mathbf{n}} \quad (7.1)$$

$$\mathbf{f}_{\text{SPT}} = 2PS_{c_p} \cos \alpha \hat{\mathbf{n}} \quad (7.2)$$

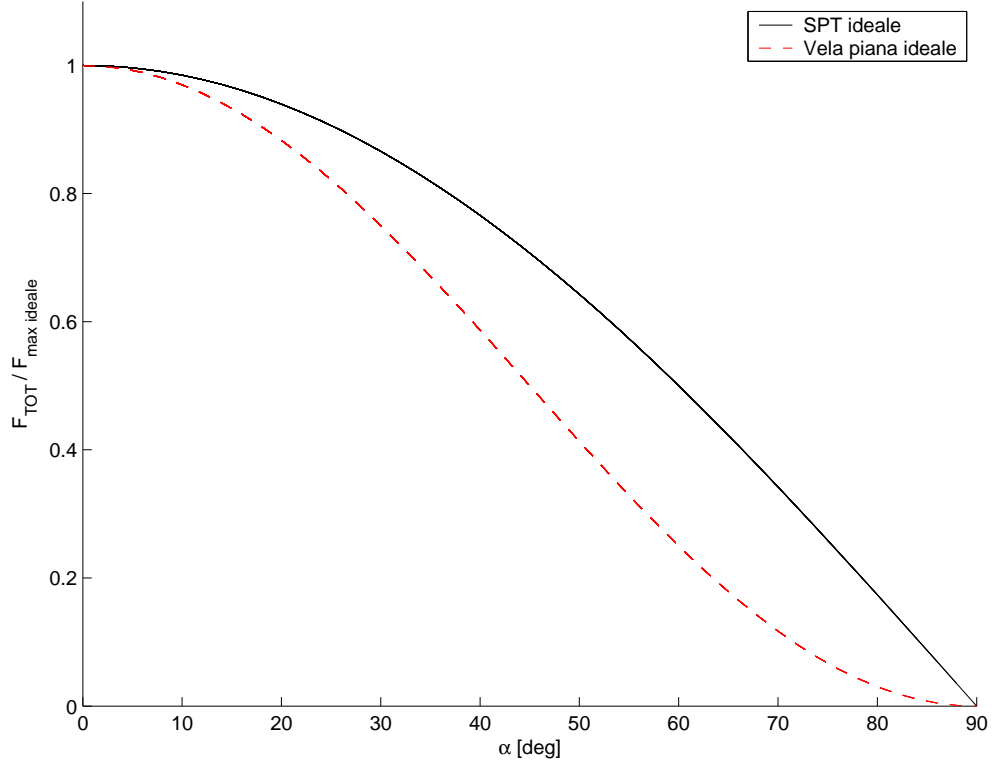
dove  $S$  è l'area della superficie della vela piana e  $S_{c_p}$  è ancora l'area della superficie riflettente del collettore proiettata su un piano perpendicolare all'asse  $x$ . Viene usata la consueta nomenclatura per l'angolo  $\alpha$  di controllo delle vele, nell'equazione (7.1)  $\alpha$  è l'angolo formato tra la direzione di propagazione dei raggi solari e la normale alla superficie della vela stessa, mentre nell'equazione (7.2) l'angolo  $\alpha$  è quello compreso tra la direzione delle radiazioni e la normale alla superficie dello specchio direttore.

Si ricorda che  $\alpha \in [0,90]$  deg.

La superficie del collettore  $S_c$  rappresenta circa il 98% dell'intera superficie della vela composta SPT, mentre la sua superficie proiettata  $S_{c_p}$  è minore di un 1% di  $S_c$  per come è stato definito l'SPT, si può quindi scegliere per una buona comparazione  $S = S_{c_p}$  e tracciare l'andamento della spinta nelle due configurazioni al variare di  $\alpha$  (vedi Figura 7.1).

Nella figura 7.1 le spinte sono state adimensionalizzate con il valore massimo ottenibile con vela piana o SPT ad  $\alpha = 0^\circ$  ovvero con la vela piana o direttore perpendicolare ai raggi solari. I valori massimi della vela piana o del SPT coincidono.

Si nota come la spinta prodotta dal SPT dipenda da un  $\cos \alpha$  mentre quella della vela piana da  $\cos^2 \alpha$ , il vantaggio del SPT è più elevato quando la forza risultante viene diretta con angolazione pronunciata rispetto alla direzione di radiazione solare (  $\alpha \in [40,80]$  deg ).



**Figura 7.1:** Confronto tra SPT e vela piana nel modello ideale

### 7.1.2 Modello ottico

In questo modello sono tenuti in considerazione gli effetti termo-ottici tramite i coefficienti precedentemente definiti  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  per la vela piana e  $D'_1$ ,  $D'_2$  e  $D'_3$  per l'SPT.

Le espressioni delle spinte sono date da:

$$\mathbf{f}_{\text{Piana}} = PS[(\mathcal{A} \cos^2 \alpha + \mathcal{B} \cos \alpha) \hat{\mathbf{n}} + \mathcal{C} \cos \alpha \sin \alpha \hat{\mathbf{t}}] \quad (7.3)$$

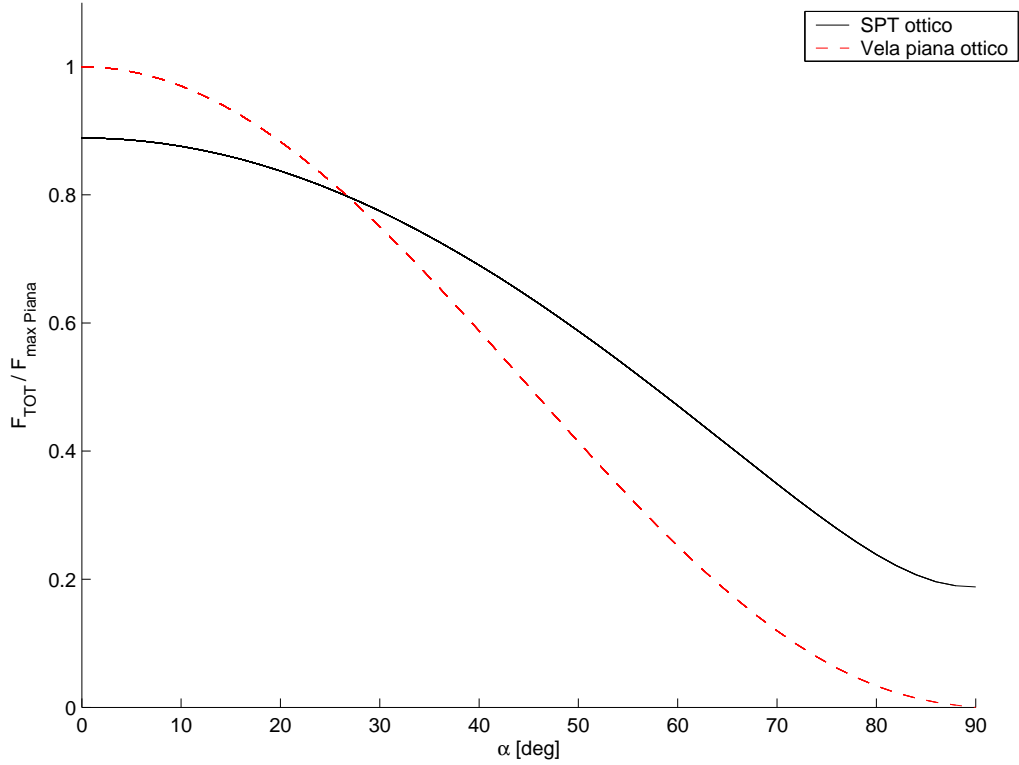
$$\mathbf{f}_{\text{SPT}} = S_{c_p} P \left[ D'_1 \hat{\mathbf{i}} + (D'_2 \cos \alpha + D'_3) \hat{\mathbf{n}} \right] \quad (7.4)$$

Anche in questo confronto il valore dell'area della superficie proiettata del collettore  $S_{c_p}$  è presa uguale a quella della vela piana  $S$ . Le spinte ottenute con i due sistemi propulsivi sono state adimensionalizzate con la spinta ottenibile con vela piana, in posizione perpendicolare ai raggi solari.

Come si osserva in figura 7.2 per  $\alpha$  piccoli la forza complessiva agente sulla vela piana è superiore a quella agente sul SPT questo per effetto delle perdite per riflessione e rifrazione che avvengono nel passaggio delle radiazioni da un



componente all'altro del Solar Photon Thrustor. Per angoli  $\alpha$  superiori di



**Figura 7.2:** Confronto tra SPT e vela piana nel modello ottico

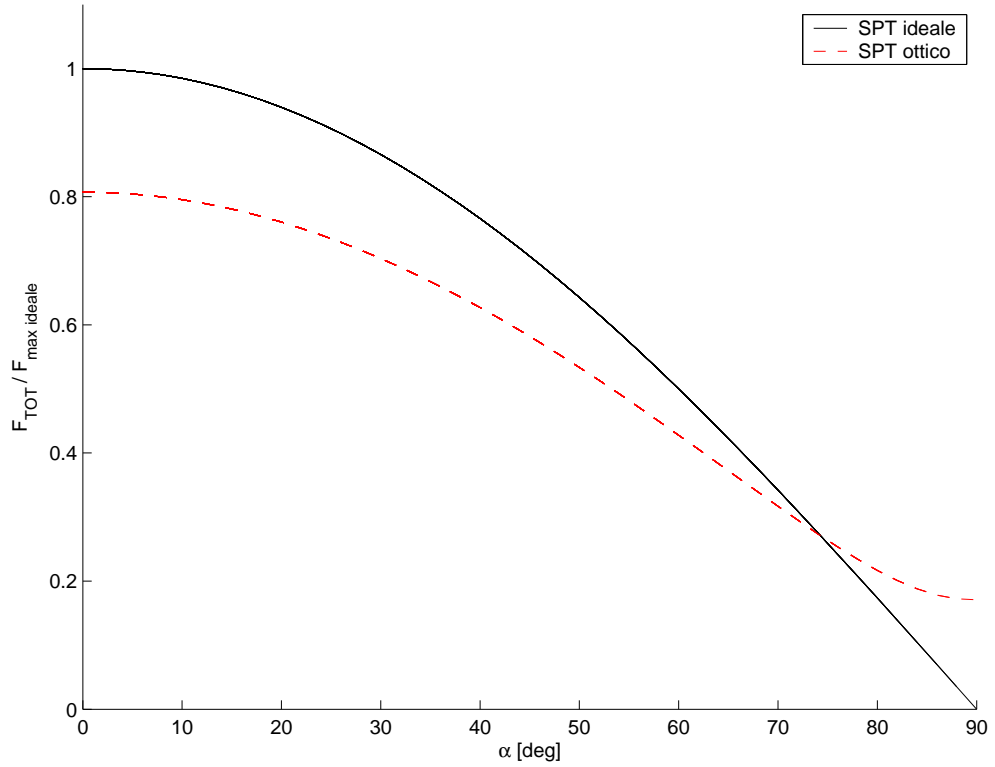
circa  $27^\circ$  deg invece la spinta che si può generare con l'SPT è superiore a quella ottenibile con vela piana perchè la propulsione generata con le vele solari è proporzionale alla superficie di effettiva raccolta delle radiazioni, e tale area per la vela piana decresce all'aumentare di  $\alpha$ , mentre per l'SPT rimane costante al variare di  $\alpha$ . L'incontro delle due curve giace per valori di  $\alpha$  nell'intorno di  $27^\circ$  deg a seconda del materiale di realizzazione delle vele.

Un'ultima osservazione da farsi è sul tratto finale delle curve, il modello ottico dell'SPT è l'unico dei quattro tipi di modelli ( vela piana nel modello ideale e ottico, SPT nel modello ideale e ottico) che produce una spinta anche con  $\alpha = 0^\circ$  per effetto della non perfetta riflessione del collettore e la conseguente perdita di energia, come ampiamente descritto in precedenza.

## 7.2 SPT ottico - SPT ideale

Con un ultimo grafo (Figura 7.3) si riportano a confronto gli andamenti delle spinte generate dal nostro SPT secondo il modello ideale e quello ottico.

Il modello ottico produce in quasi tutto l'intervallo una spinta inferiore



**Figura 7.3:** SPT nel modello ideale e ottico

a quella prodotta dal modello ideale, in quanto sono considerate le perdite energetiche dovute alla non perfetta riflessione e dovute agli effetti termici. Il modello ottico e quindi l'andamento della spinta approssima comunque il comportamento reale della vela in modo migliore di quanto non lo faccia il modello ideale.

## Parte III

# Controllo Ottimo

# 8

## Controllo Ottimo

L'applicazione del controllo ottimo consiste nella ricerca della storia temporale di controllo che minimizzi o massimizzi una data funzione.

Nel nostro caso andremo a minimizzare il tempo per un trasferimento Terra-Marte utilizzando come sistema propulsivo il Solar Photon Thrustor, e come modello del SPT il modello ottico. Tale studio è del tutto innovativo.

Questo tipo di problema può essere affrontato con una metodologia diretta o una indiretta.

Nel presente caso è stato scelto, per la soluzione finale, un metodo indiretto che passa attraverso la formulazione variazionale del problema.

Questo metodo ha come caratteristiche generali fondamentali l'elevata precisione numerica del risultato, il basso numero di parametri da utilizzare, i tempi di calcolo necessari limitati, la difficoltà di convergenza e la scarsa robustezza.

### 8.1 Equazioni del moto

Le equazioni che descrivono il moto di una sonda di massa  $m$  rispetto al sistema di riferimento Eliocentrico-Eclittico  $\mathcal{T}_{\odot}(x,y,z)$  precedentemente definito, sono:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \tag{8.1}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu_{\odot}}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a} \tag{8.2}$$

dove  $[r]_{\mathcal{T}_\odot} = [r_x, r_y, r_z]^T$  e  $[v]_{\mathcal{T}_\odot} = [v_x, v_y, v_z]^T$  sono rispettivamente il vettore posizione e velocità della sonda in  $\mathcal{T}_\odot$ , mentre  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione dovuta all'azione propulsiva della vela solare.

## 8.2 Definizione delle prestazioni

Per poter confrontare le prestazioni dell'SPT con i risultati numerici, presenti in letteratura, ottenuti con le consuete vele solari piane, è necessario dapprima definire un termine di paragone adeguato.

Viene indicata come accelerazione caratteristica ( $a_c$ ) il modulo dell'accelerazione posseduta dalla vela posta ortogonalmente alla direzione dei raggi solari alla distanza di 1 AU, nel caso del SPT tale configurazione è ottenuta ponendo lo specchio direttore ortogonalmente alla direzione delle radiazioni solari. Normalmente questa accelerazione viene espressa tramite il “parametro di snellezza”  $\beta$ , definito come il rapporto tra l'accelerazione determinata dalla pressione solare  $\mathbf{a}$  e quella legata alla forza gravitazionale  $\mathbf{a}_{grav}$  in uno stesso punto dello spazio:

$$\beta \triangleq \frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}_{grav}\|} \quad (8.3)$$

## 8.3 Accelerazione del SPT

Vengono di seguito definite esplicitamente le accelerazioni prodotte dalla radiazione solare sul SPT secondo il modello ideale e quello ottico. Nel successivo studio sul controllo ottimo e sulle prestazioni ottenibili nelle missioni considerate si utilizzerà il solo modello ottico, in quanto più raffinato e preciso rispetto a quello ideale. La scelta di definire comunque l'accelerazione nel modello ideale è dettata dal voler evidenziare le analogie tra le accelerazioni dei due modelli.

### 8.3.1 Modello ideale

Se si considera la vela solare composta nel caso ideale, l'accelerazione dovuta alla forza esercitata dalla pressione di radiazione solare  $P$  è data dalla

seguente espressione:

$$\mathbf{a}_i = \frac{2PA}{m} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) \hat{\mathbf{n}}_i \quad (8.4)$$

dove il pedice  $i$  ricorda che siamo nel caso ideale,  $A$  è l'area proiettata del collettore ( $S_{c_p}$ ),  $\hat{\mathbf{r}} \triangleq \mathbf{r}/r$  è la direzione della radiazione elettromagnetica incidente mentre  $\hat{\mathbf{n}}_i$  è il versore normale alla superficie dello specchio direttore della vela, ed infine  $m$  è la massa del velivolo.

L'accelerazione caratteristica definita come il modulo dell'accelerazione che si ottiene quando lo specchio direttore è orientato normalmente alla direzione della radiazione incidente ( $\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{r}}$ ) ad 1 AU è data da:

$$a_{c_i} = \frac{2 P_{\oplus} A}{m} \quad (8.5)$$

Poiché l'accelerazione gravitazionale e l'accelerazione dovuta alla pressione di radiazione solare dipendono entrambe dall'inverso del quadrato della distanza dal Sole,  $\beta$  risulta indipendente da tale distanze e si può ricavarne un ulteriore definizione:

$$\beta = \frac{\sigma^*}{\sigma} \quad (8.6)$$

dove  $\sigma^*$ , il “carico della vela critico”, è pari a  $1.53 \text{ g/m}^2$  ed è funzione della massa e della luminosità solare, mentre

$$\sigma \triangleq \frac{m}{A} \quad (8.7)$$

è il rapporto tra la massa della vela composta e la superficie  $A$  ed è detto “carico della vela”. Si ricordi che, per come è stata definita la geometria della vela,  $A$  rappresenta circa il 97% della superficie complessiva dell'SPT.

Ricordando la definizione di  $\beta$  e ricordando che si assume che la pressione di radiazione vari in maniera inversamente proporzionale alla distanza  $r$  dal Sole, si ottiene:

$$\beta = \frac{2PA r^2}{m \mu_{\odot}} \quad (8.8)$$

da cui:

$$\frac{PA}{m} = \frac{\beta}{2} \frac{\mu_{\odot}}{r^2} \quad (8.9)$$

Indicando con  $\alpha_i \in [0, \pi/2]$  l'angolo di controllo della vela, ovvero l'angolo

compreso tra i versori  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}_i$

$$\cos \alpha_i = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \quad (8.10)$$

l'accelerazione  $\mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i/m$  può essere scritta, in base alle (8.4)-(8.9), come:

$$\mathbf{a}_i = \beta \frac{\mu_\odot}{r^2} \cos \alpha_i \hat{\mathbf{n}}_i \quad (8.11)$$

### 8.3.2 Modello ottico

L'espressione dell'accelerazione del Solar Phon Thrustor nel modello ottico  $\mathbf{a}_o$ , in funzione dei parametri fisici caratteristici della vela, è data dal rapporto tra la spinta complessiva ottenibile dalla vela secondo il modello ottico (equazione (6.48)) e la massa  $m$  del velivolo spaziale:

$$\mathbf{a}_o = \frac{P A}{m} [D_1 \hat{\mathbf{r}} + (D_2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_o) + D_3) \hat{\mathbf{n}}_o] \quad (8.12)$$

dove il pedice  $o$  indica che siamo nel modello ottico, dove  $\hat{\mathbf{r}} \triangleq \mathbf{r}/r$  è ancora la direzione della radiazione elettromagnetica incidente mentre  $\hat{\mathbf{n}}_o$  è il versore normale alla superficie dello specchio direttore della vela.

Assumendo come in precedenza che la pressione di radiazione vari in maniera inversamente proporzionale alla distanza  $r$  dal Sole, si ricava l'accelerazione caratteristica della vela composta SPT nel modello ottico:

$$a_{c_o} = \frac{A P_\oplus}{m} [D_1 + D_2 + D_3] \quad (8.13)$$

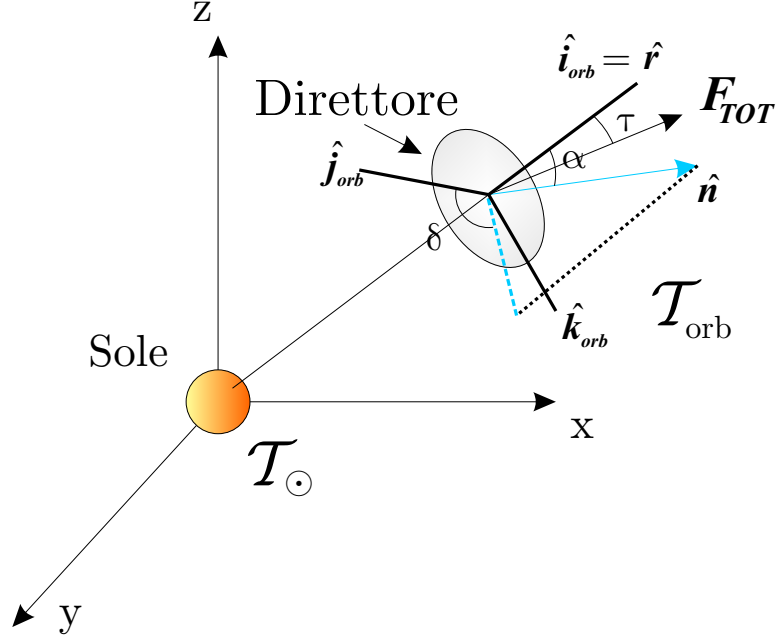
L'accelerazione  $\mathbf{a}_o = \mathbf{f}_o/m$  può essere riformulata usando l'equazione (8.9) come:

$$\mathbf{a}_o = \frac{\beta}{2} \frac{\mu_\odot}{r^2} [D_1 \hat{\mathbf{r}} + (D_2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_o) + D_3) \hat{\mathbf{n}}_o] \quad (8.14)$$

oppure, utilizzando  $\alpha_o \in [0, \pi/2]$  ovvero l'angolo di cono della vela composta nel modello ottico (angolo compreso tra i due versori  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}_o$ ), l'accelerazione è esprimibile come:

$$\mathbf{a}_o = \frac{\beta}{2} \frac{\mu_\odot}{r^2} [D_1 \hat{\mathbf{r}} + (D_2 (\cos \alpha_o) + D_3) \hat{\mathbf{n}}_o] \quad (8.15)$$

Sia  $\mathcal{T}_{orb}(x_{orb}, y_{orb}, z_{orb})$  una terna orbitale di versori  $\hat{\mathbf{i}}_{orb} \equiv \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{j}}_{orb}, \hat{\mathbf{k}}_{orb}$



**Figura 8.1:** Terna di riferimento

nella quale il piano  $z_{orb} = 0$  contiene l'asse  $z$  della terna  $\mathcal{T}_\odot$  e l'asse  $y_{orb}$  è diretto verso il polo dell'eclittica. È conveniente esprimere le componenti del versore normale alla vela in  $\mathcal{T}_{orb}$  come funzione dell'angolo di cono  $\alpha_o$  e dell'angolo  $\delta_o \in [-\pi, \pi]$  riportati in figura 8.1:

$$[\hat{n}_o]_{\mathcal{T}_{orb}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_o \\ \sin \alpha_o \cos \delta_o \\ \sin \alpha_o \sin \delta_o \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

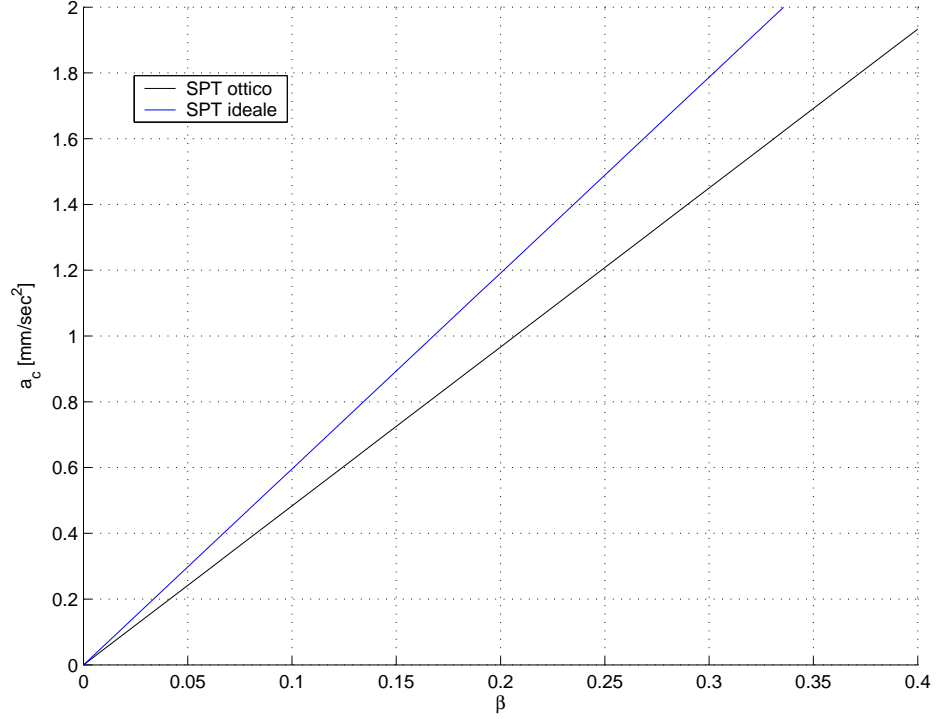
Il vettore di controllo  $\mathbf{u}_o$  è dato, ricordando le (8.14)-(8.16), da:

$$\mathbf{u}_o = [\alpha_o, \delta_o]^T \quad (8.17)$$

### 8.3.3 Relazioni tra $a_c$ e $\beta$

Vengono di seguito riportate le relazioni tra le accelerazioni caratteristiche ed il parametro  $\beta$ .





**Figura 8.2:** Relazione tra accelerazioni caratteristiche e  $\beta$

Dalle equazioni (8.5) e (8.9) si ricava il legame tra il parametro  $\beta$  e l'accelerazione caratteristica della vela nel caso ideale  $a_{c_i}$ , attraverso la relazione:

$$a_{c_i} = \frac{2 P_{\oplus} \beta}{\sigma^*} \quad (8.18)$$

dove  $P_{\oplus} \cong 4.557 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$  è la pressione di radiazione solare a 1 AU.

Per quanto riguarda il caso ottico dalle equazione (8.9) e (8.13) si esplicita l'espressione di  $a_{c_o}$  in funzione del parametro caratteristico  $\beta$ , ovvero il parametro di snellezza riferito al caso ideale e comunemente utilizzato in letteratura:

$$a_{c_o} = \frac{\beta P_{\oplus}}{\sigma^*} [D_1 + D_2 + D_3] \quad (8.19)$$

In figura 8.2 vengono riportati gli andamenti delle  $a_c$  in funzione di  $\beta$ .

## 8.4 Ottimizzazione della traiettoria

L'ottimizzazione della traiettoria di minimo tempo consiste nel determinare la legge di controllo  $\mathbf{u}(t)$ , con  $t \in [0, t_f]$ , in modo che  $t_f$  sia il tempo minimo necessario per compiere un trasferimento della sonda spaziale da una condizione iniziale  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$  ad una finale  $(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f)$  nel caso in cui entrambe le condizioni siano assegnate. Utilizzando la teoria del calcolo variazionale, questo equivale a massimizzare l'indice di prestazione:

$$J = -t_f \quad (8.20)$$

Per il seguente studio dalle equazioni (8.1) e (8.2) si ottiene la funzione Hamiltoniana  $H$ :

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{a} \quad (8.21)$$

dove  $\boldsymbol{\lambda}_r \triangleq [\lambda_{rx}, \lambda_{ry}, \lambda_{rz}]^T$  e  $\boldsymbol{\lambda}_v \triangleq [\lambda_{vx}, \lambda_{vy}, \lambda_{vz}]^T$  sono le variabili aggiunte relative rispettivamente alla posizione  $\mathbf{r}$  e alla velocità  $\mathbf{v}$ .

Le equazioni di Eulero-Lagrange ci forniscono le derivate temporali:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_v - \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{a})}{\partial \mathbf{r}} \quad (8.22)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\boldsymbol{\lambda}_r - \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{a})}{\partial \mathbf{v}} \quad (8.23)$$

Il valore all'istante finale della funzione Hamiltoniana è fissato dalla condizione di trasversalità  $H_f = 1$ .

### 8.4.1 Controllo ottimo del modello ottico

Il controllo ottimo  $\mathbf{u}(t)$ , in base al principio di massimo di Pontryagin, è quello che massimizza ad ogni istante la funzione Hamiltoniana  $H$  nel dominio dei controlli ammissibili  $\mathcal{U}$ . Per fare ciò si massimizza la parte di  $H$  che dipende esplicitamente dal controllo. Definita  $H'$  tale funzione ne segue che:

$$\mathbf{u} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} H \equiv \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} H' \quad \text{with} \quad H' \triangleq \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{a} \quad (8.24)$$

Sostituendo l'espressione dell'accelerazione nel caso ottico (8.14) nelle (8.21)–(8.23) si ottiene rispettivamente la funzione Hamiltoniana nel caso ottico

$H_o$ :

$$H_o = \boldsymbol{\lambda}_{r_o} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_{v_o} \cdot \mathbf{r} + \frac{\beta \mu_\odot}{2 r^2} [D_1 (\boldsymbol{\lambda}_{v_o} \cdot \hat{\mathbf{r}}) + (D_2 \cos \alpha_o + D_3) (\boldsymbol{\lambda}_{v_o} \cdot \hat{\mathbf{n}}_o)] \quad (8.25)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{r_o} = \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_{v_o} - \frac{3 \mu_\odot}{r^3} (\boldsymbol{\lambda}_{v_o} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\beta \mu_\odot}{2 r^3} \{ D_1 [\boldsymbol{\lambda}_{v_o} - 3 (\boldsymbol{\lambda}_{v_o} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] + \quad (8.26)$$

$$D_2 (\boldsymbol{\lambda}_{v_o} \cdot \hat{\mathbf{n}}_o) [\hat{\mathbf{n}}_o - 3 (\hat{\mathbf{n}}_o \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] - 2 D_3 (\boldsymbol{\lambda}_{v_o} \cdot \hat{\mathbf{n}}_o) \hat{\mathbf{r}} \}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{v_o} = -\boldsymbol{\lambda}_{r_o} \quad (8.27)$$

dove il pedice  $o$  ricorda che stiamo utilizzando il modello ottico.

La legge di controllo ottimo si determina massimizzando la funzione  $H'_o$ :

$$H'_o = \frac{\beta \mu_\odot}{2 r^2} [(D_2 \cos \alpha_o + D_3) (\boldsymbol{\lambda}_{v_o} \cdot \hat{\mathbf{n}}_o)] \quad (8.28)$$

Al fine di massimizzare globalmente  $H'_o$  verrà imposta la condizione necessaria  $\partial H'_o / \partial \mathbf{u}_o = 0$  e verrà controllata anche la condizione sufficiente (o di convessità) di Legendre-Clebsch:

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial \mathbf{u}^2} > 0 \quad (\text{definita positiva}) \quad (8.29)$$

E' conveniente innanzi tutto determinare le componenti del vettore  $\boldsymbol{\lambda}_{v_o}$  nella terna orbitale  $\mathcal{T}_{orb}$ :

$$[\lambda_{v_o}]_{\mathcal{T}_{orb}} = \lambda_{v_o} \begin{bmatrix} \cos \tilde{\theta}_o \\ \sin \tilde{\theta}_o \cos \tilde{\delta}_o \\ \sin \tilde{\theta}_o \sin \tilde{\delta}_o \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \tilde{\theta}_o \in [0, \pi] \quad (8.30)$$

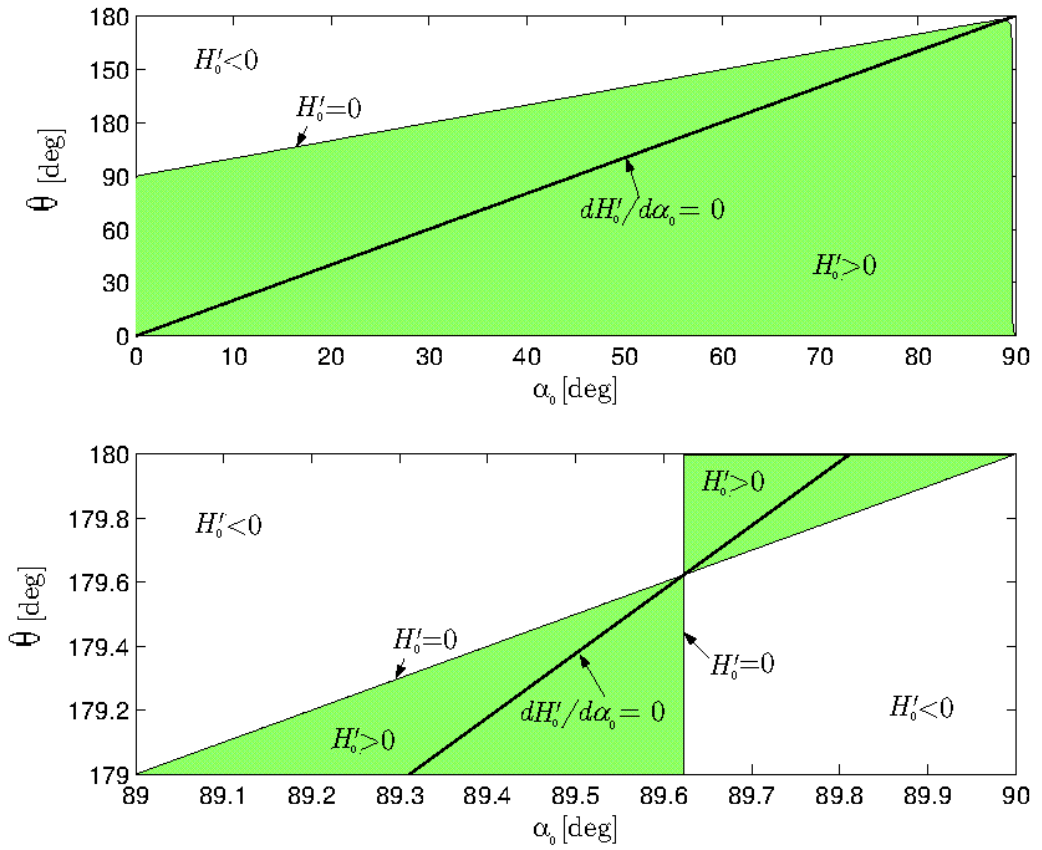
quindi imponendo le condizioni sopra scritte si ottengono le seguenti relazioni:

$$\tilde{\theta}_o = \alpha_o + \arctan \left( \frac{\sin \alpha_o}{-\cos \alpha_o + D_3/D_2} \right) \quad (8.31)$$

$$\tan \delta_o = \tan \tilde{\delta}_o \quad (8.32)$$

Si osserva che un generico punto  $(\alpha_o, \tilde{\theta}_o)$  che è soluzione dell'equazione (8.31)

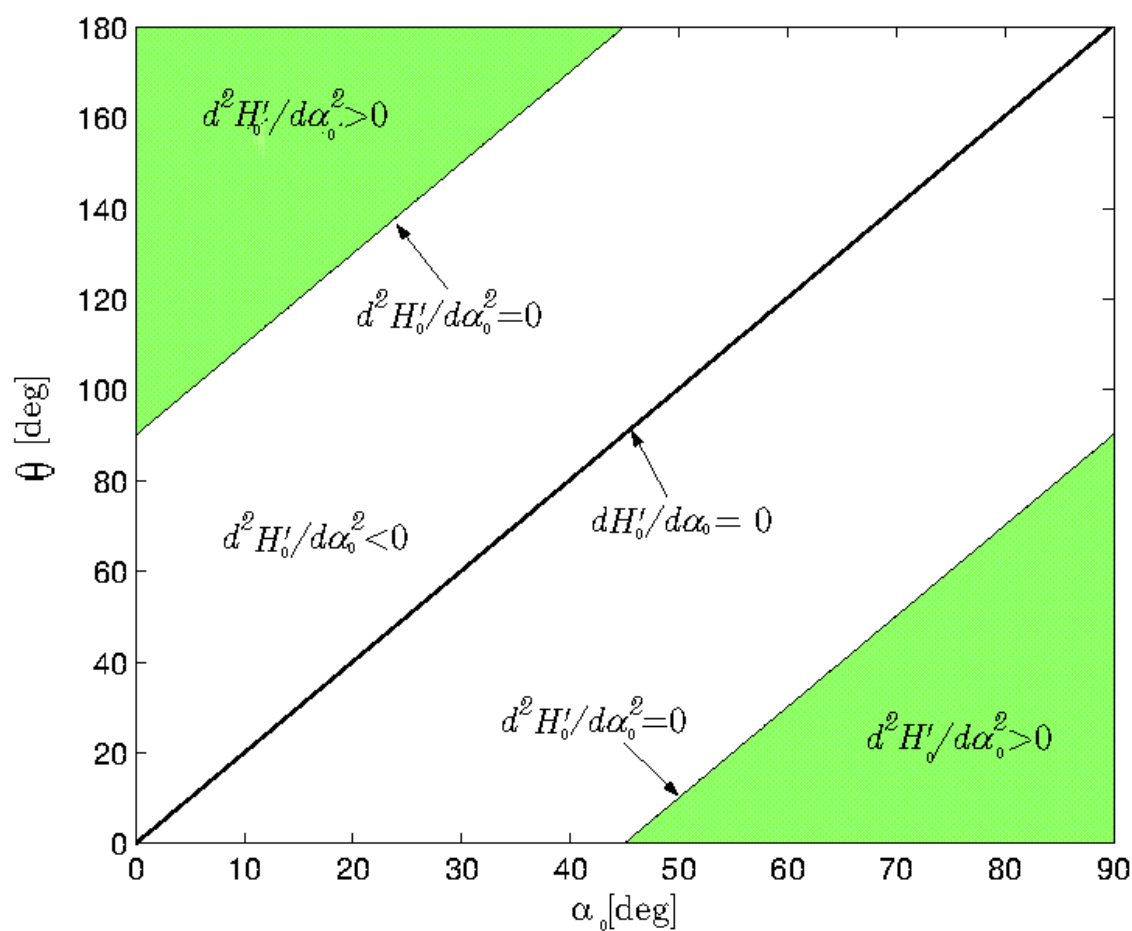
rappresenta un massimo di  $H'_o$  purché  $H'_o(\alpha_o, \tilde{\theta}_o) \geq 0$ . Deve essere quindi verificata che:



**Figura 8.3:** Angolo di cono del direttore ottimale per vela solare composta con modello di forza ottico.

tiene alla regione di piano dove  $H'_o \geq 0$  per ogni valore di  $\alpha_o \in [0, \pi/2]$  ad esclusione del valore  $\alpha = \alpha^*$  dove  $H'_o = 0$ . L'angolo  $\alpha^*$  è dato dall'intersezione

delle due funzioni  $f_1$  e  $f_2$  e vale:



**Figura 8.4:** Controllo sulla condizione di convessità per la legge di controllo riguardante l'angolo di cono del direttore ottimale

## 8.5 Il problema di ottimo

Per minimizzare il tempo per un trasferimento Terra-Marte occorre risolvere un problema variazionale di ottimo dove l'indice da ottimizzare è l'intervallo di tempo necessario al sistema per raggiungere uno stato desiderato.

Tale problema è definito *a tempo aperto*.

La soluzione, vista l'impossibilità di ottenerne una analitica, è stata determinata attraverso un algoritmo numerico.

Ciò che viene cercato dall'algoritmo è il valore dei  $\lambda_o$  all'istante iniziale in modo tale da generare una traiettoria che soddisfi sia le condizioni al contorno, sia la condizione di trasversalità, sia gli eventuali vincoli.

A causa del valore ridotto del modulo della forza prodotta dalla radiazione solare, il tempo di trasferimento è poco sensibile a piccole variazioni nel vettore di controllo della vela, di conseguenza la convergenza verso una soluzione di ottimo è difficile.

## 8.6 Metodo di Soluzione

Il *Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP) associato al problema variazionale è costituito dalle equazioni del moto (8.1)-(8.2) e dalle equazioni di Eulero-Lagrange 8.26-8.27.

Al fine di ridurre la sensibilità numerica del problema differenziale, le variabili del sistema differenziale possono essere adimensionalizzate utilizzando le unità canoniche:

- - l'unità di distanza pari ad 1 AU
- - l'unità di tempo pari a  $\sqrt{\frac{AU^3}{\mu_\odot}} = 5027723$

Al problema devono essere assegnate opportune condizioni di vincolo in particolare:

- la posizione e la velocità iniziale della vela solare nell'istante  $t_o = 0$
- la posizione e la velocità finale della vela solare nell'istante  $t_f$
- condizione di trasversalità per il problema di rendez-vous

Il problema dei due punti può essere risolto numericamente cercando le condizioni iniziali incognite in maniera da soddisfare le condizioni finali, è opportuno osservare che il tempo finale non è un dato del problema e quindi non è noto a priori nel processo d'integrazione numerica.

### 8.6.1 Integrazione Numerica

Per l'ottimizzazione orbitale è stata implementata in *Matlab* un routine di integrazione numerica del problema differenziale tramite una strategia consolidata per problemi di questo tipo, ed è stato adottato uno dei metodi di integrazione numerica che fanno parte della famiglia dei metodi di *Runge-Kutta*.

### 8.6.2 Algoritmo Risolutivo

Il primo passo consiste nell'adimensionalizzare le equazioni e i parametri del problema.

Successivamente si sceglie un valore di primo tentativo del tempo di missione  $t_f$  e si determinano i valori iniziali in maniera che soddisfino le condizioni finali.

Si calcola infine il valore finale della Hamiltoniana in  $t_f$  controllando che la condizione di trasversalità sia verificata, se lo è la traiettoria calcolata è ottima, in caso contrario si modifica il tempo di missione  $t_f$  e si ripete il ciclo.

Il programma utilizza un metodo numerico misto che unisce a tecniche di minimizzazione numerica gradientali [10] tecniche dirette [11].

# 9

## Analisi di missione Terra - Marte

Le leggi di controllo discusse nella sezione precedente sono state utilizzate per studiare la fase eliocentrica di un trasferimento interplanetario di una sonda propulsa con una vela solare composta.

### 9.1 Caratteristiche dell'analisi di missione

Il modelli utilizzati per schematizzare la spinta generata dalla pressione di radiazione solare sulla vela stessa è quello “ottico”.

Le condizioni iniziali della sonda sono state determinate ricorrendo ad un calcolo di effemeridi (Ref. [12]) considerando nullo l'eccesso iperbolico al termine della fase di fuga della Terra (Ref. [6]).

Sono state studiate le traiettorie di trasferimento eliocentrico verso un pianeta esterno all'Eclittica, Marte ( $\sigma$ ), le cui posizioni e velocità all'istante finale  $t_f$  sono state ricavate ricorrendo ad un calcolo di effemeridi.

E' stata utilizzata al vela composta in cui è stato utilizzato lo stesso materiale per tutti e tre i principali componenti (collettore, riflettore e direttore). Introducendo in ingresso la sola data di partenza, la tecnica di calcolo sviluppata è in grado di determinare la traiettoria di minimo tempo con l'andamento dei relativi angoli di controllo della vela.

Nel presente lavoro è stato campionato un periodo di tempo superiore ad un anno (aprile 2016 - giugno 2017), tramite lanci effettuati con un intervallo di tempo costante (di dieci giorni) tra due date consecutive di lancio. Per ogni



data di lancio sono state assunti undici diversi valori dell'accelerazione caratteristica (da 1 a 2 mm/s<sup>2</sup>) anch'essi con intervallo di variazione costante (di 0.1 mm/s<sup>2</sup>).

## 9.2 Analisi dei risultati

Sono state simulate delle traiettorie di trasferimento verso Marte assumendo che l'orbita di partenza della vela solare coincida con l'orbita eliocentrica della Terra, si considerano quindi delle traiettorie di fuga dal nostro pianeta aventi un eccesso iperbolico nullo.

I risultati ottenuti riguardo alla traiettoria di minimo tempo, espressi in funzione della data di partenza e dell'accelerazione caratteristica  $a_c$ , sono riportati nelle figure 9.1 e 9.2 dove il tempo di minimo trasferimento è espresso in giorni.

La velocità e la posizione desiderate sono state raggiunte con un errore massimo pari a  $10^{-10}$ .

Gli stessi risultati sono riuniti nel grafico di figura in funzione della data di lancio espressa in forma di Data Giuliana Modificata MJD, qua si può osservare complessivamente l'andamento dei risultati.

$a_c$	1/4/2016	10/4/2016	20/4/2016	1/5/2016	10/5/2016	20/5/2016	1/6/2016	10/6/2016	20/6/2016
1	364.86	373.77	384.56	397.19	408.03	420.62	436.55	449.14	463.84
1.1	349.52	357.20	366.99	378.71	388.87	400.72	415.77	427.68	441.60
1.2	337.35	343.56	352.24	363.03	372.53	383.70	397.92	409.22	422.44
1.3	327.92	332.39	339.82	349.63	358.47	368.97	382.43	393.15	405.72
1.4	320.84	323.34	329.35	338.12	346.28	356.12	368.85	379.03	391.01
1.5	315.16	317.16	320.58	328.20	335.67	344.85	356.86	366.53	377.95
1.6	312.60	315.17	317.29	319.66	326.39	334.91	346.23	355.41	366.29
1.7	304.63	306.68	309.35	312.32	318.28	326.12	336.46	345.46	355.83
1.8	298.45	300.18	303.62	306.08	311.20	318.36	328.28	336.52	346.40
1.9	295.01	297.33	299.02	300.82	305.02	311.44	320.68	328.49	337.87
2	292.13	294.22	295.43	296.47	299.71	305.33	313.86	321.19	330.13

$a_c$	1/7/2016	10/7/2016	20/7/2016	1/8/2016	10/8/2016	20/8/2016	1/9/2016	10/9/2016	20/9/2016
1	480.89	495.51	512.41	533.38	549.15	567.28	588.45	603.91	620.91
1.1	457.79	471.71	487.87	508.07	523.65	541.20	562.23	577.26	594.49
1.2	437.84	451.14	466.62	486.09	501.21	518.37	539.15	554.64	571.52
1.3	420.42	433.13	447.98	466.75	489.45	498.17	518.63	534.01	550.91
1.4	405.04	417.21	431.47	449.57	463.79	480.11	500.21	515.44	532.29
1.5	391.36	403.02	416.73	434.19	447.97	463.87	483.56	489.59	515.32
1.6	379.12	390.30	403.49	420.34	433.69	449.15	468.42	483.22	499.80
1.7	368.10	378.84	391.51	407.78	420.72	435.78	454.60	469.14	485.53
1.8	359.14	368.44	380.65	396.36	408.89	424.10	441.92	456.20	472.37
1.9	349.10	358.44	370.74	385.92	398.06	412.27	430.25	444.24	460.18
2	340.87	350.37	361.69	376.35	388.11	404.39	419.47	433.19	448.87

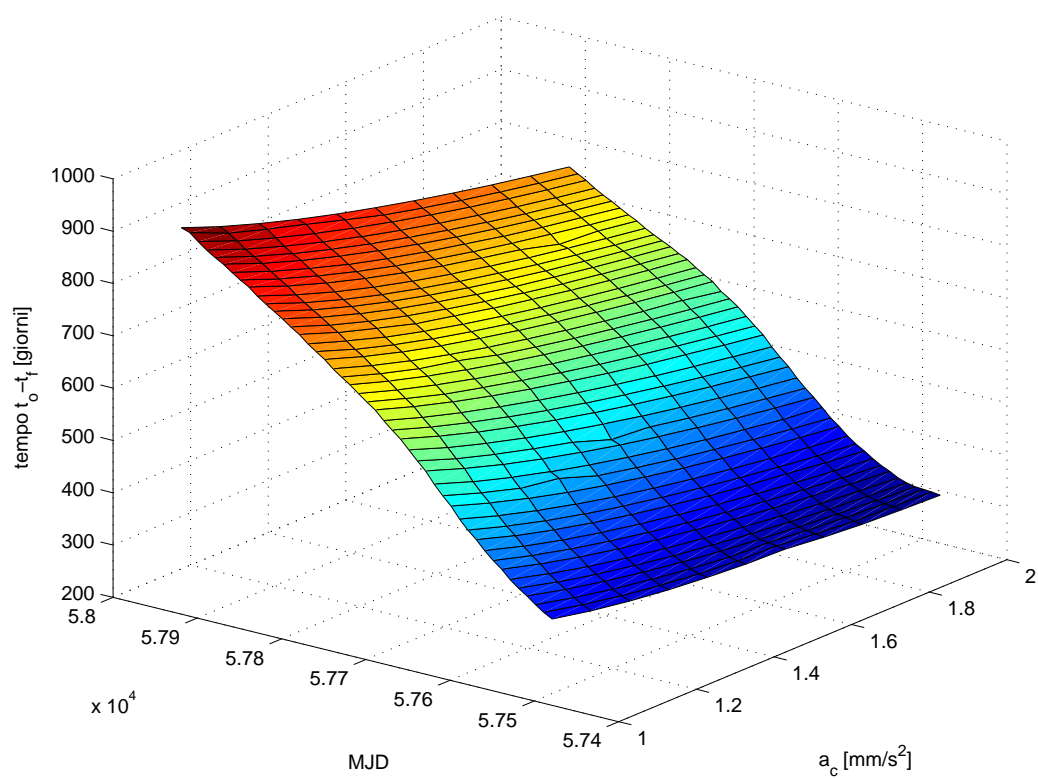
$a_c$	1/10/2016	10/10/2016	20/10/2016	1/11/2016	10/11/2016	20/11/2016	1/12/2016	10/12/2016	20/12/2016
1	637.71	651.11	665.24	681.24	692.68	704.95	718.06	728.60	740.21
1.1	612.14	625.88	640.37	656.72	668.31	680.63	693.64	703.97	715.24
1.2	589.43	603.45	618.29	635.01	645.83	659.31	672.36	682.63	693.72
1.3	569.00	583.25	598.39	615.48	627.55	640.24	653.43	666.73	674.75
1.4	550.46	564.87	580.25	597.69	610.01	622.94	636.33	646.71	657.74
1.5	533.51	548.04	563.61	581.35	593.89	607.07	620.68	631.18	642.28
1.6	517.95	532.52	548.23	566.22	578.98	592.98	606.22	616.87	628.08
1.7	503.58	518.16	533.97	552.15	565.10	578.73	592.79	603.59	614.92
1.8	490.28	504.83	520.83	539.68	552.12	565.94	580.22	591.18	602.65
1.9	477.92	492.41	508.28	526.71	539.94	553.94	568.41	579.53	592.51
2	466.41	480.82	496.66	515.15	528.49	542.63	557.29	568.55	578.65

**Figura 9.1:** Tempo di minimo trasferimento Terra-Marte per le date di partenza relative all'anno 2016

$a_c$	1/1/2017	10/1/2017	20/1/2017	1/2/2017	10/2/2017	20/2/2017	1/3/2017	10/3/2017	20/3/2017
1	754.11	765.30	776.19	790.21	800.61	812.18	822.61	832.82	843.99
1.1	728.60	738.58	750.60	763.02	773.12	784.19	794.19	804.15	815.11
1.2	706.73	716.36	727.01	739.83	749.43	760.09	769.73	779.37	790.04
1.3	687.55	696.94	707.26	701.64	728.84	739.10	748.37	757.68	768.02
1.4	670.43	679.67	689.76	701.61	710.61	720.55	729.49	738.47	748.48
1.5	654.96	664.10	674.02	685.72	694.32	703.96	712.60	721.28	730.96
1.6	640.79	649.90	659.71	671.73	679.63	688.19	697.34	705.71	715.13
1.7	627.71	636.82	646.57	657.94	666.14	675.29	683.44	691.59	700.68
1.8	615.54	624.68	634.40	645.61	653.81	662.71	670.66	678.60	687.43
1.9	604.16	613.34	623.06	634.22	642.22	651.06	658.85	666.59	675.19
2	593.46	602.70	612.44	623.53	631.23	640.12	647.85	655.43	663.81

$a_c$	1/4/2017	10/4/2017	20/4/2017	1/5/2017	10/5/2017	20/5/2017	1/6/2017	10/6/2017	20/6/2017
1	857.11	866.74	877.23	888.53	897.68	907.71	920.12	933.21	938.58
1.1	828.10	837.70	848.21	859.60	868.80	878.91	890.51	901.56	910.03
1.2	802.78	812.24	822.68	834.04	843.25	853.41	865.52	877.96	884.68
1.3	780.43	789.72	799.52	811.25	820.40	830.52	842.67	856.32	861.87
1.4	760.53	769.60	779.66	790.74	799.80	809.83	821.93	834.02	841.11
1.5	742.66	751.47	761.30	772.17	781.08	791.01	802.99	812.52	822.08
1.6	726.46	735.02	745.40	755.22	763.97	773.75	785.54	794.48	804.53
1.7	711.68	719.99	729.51	739.68	748.24	757.83	769.48	778.27	788.23
1.8	689.10	706.17	715.71	725.34	733.69	743.10	754.54	763.25	773.05
1.9	685.55	693.39	703.31	712.04	720.21	729.32	740.62	749.17	758.84
2	673.90	681.53	690.51	699.66	707.61	716.54	727.58	735.97	745.49

**Figura 9.2:** Tempo di minimo trasferimento Terra-Marte per le date di partenza relative all'anno 2017



**Figura 9.3:** Tempo di minimo trasferimento Terra-Marte rispetto alla MJD

# 10

## Conclusioni e possibili sviluppi futuri

L'obiettivo del lavoro di tesi nasce a seguito della recente ricerca di propulsori alternativi da utilizzare in particolare in missioni richiedenti piccole spinte per tempi elevati.

Il continuo sviluppo nella miniaturizzazione degli apparati meccanici ed elettronici favorisce l'applicazione dei propulsori a vela solare.

Nello studio è stato elaborato un modello fisico-matematico ideale ed uno ottico che caratterizzano le prestazioni della vela solare composta e sono stati confrontati i due modelli.

Particolare interesse è stato dato al modello ottico, innovativo rispetto alla attuale letteratura delle vele. Utilizzando tale modello è stato realizzato uno sviluppo di un codice di calcolo in ambiente *matlab* per la simulazione di orbite di minimo tempo per rendezvous Terra-Marte tramite l'applicazione della teoria del controllo ottimale globale.

Le innovazioni rispetto ai risultati in letteratura sono state:

- L'utilizzo di una vela solare composta da tre componenti principali riflettenti.
- L'utilizzo del modello non ideale applicato alla vela composta.
- La generalizzazione del modello fisico-matematico, rispetto al tipo di materiale con cui vengono realizzati i componenti della vela composta.
- La tridimensionalità delle traiettorie di rendezvous.
- Utilizzo di orbite reali sia per il bersaglio che per la Terra attraverso un calcolo di effemeridi.

La Tesi può essere utilizzata come base per ulteriori sviluppi del modello di vela compostata.

Alcuni possibili sviluppi comprendono:

- Lo sviluppo di nuovi materiali per la realizzazione di vele solari al fine di migliorarne le prestazioni.
- Lo sviluppo di uno studio termico del materiale delle vele per massimizzare il rapporto collettore-riflettore.
- Lo sviluppo di uno studio sull'usura del materiale delle vele in particolare del riflettore e direttore in quanto soggetti a una pressione di radiazione solare elevata.
- Lo sviluppo di un sistema di avvolgimento a terra e apertura nello spazio dei vari componenti della vela composta.
- Lo sviluppo del sistema di sostentamento strutturale della vela composta.
- Lo sviluppo di un sistema di controllo di assetto per ognuna delle missioni studiate.

# Bibliografia

- [1] Wright, J. L., *Space Sailing*, Gordon and Breach Science Publishers, Gordon and Breach, Amsterdam, 1992.
- [2] McInnes, C. R., *Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer-Praxis Series in Space Science and Technology, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [3] Cichan, T. e Melton, R. G., “Optimal Trajectories for Non-Ideal Solar Sails,” *AAS Paper 01-471*, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Quebec City, CANADA, August 2001.
- [4] Bryson, A. E. e Ho, Y. C., *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975.
- [5] Sauer, Jr., C. G., “Optimum Solar-Sail Interplanetary Trajectories,” *AIAA Paper 76-792*, AIAA/AAS Astrodynamics Conference, San Diego, CA, August 1976.
- [6] Coverstone, V. L. e Prussing, J. E., “Technique for Escape from Geosynchronous Transfer Orbit Using a Solar Sail,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 4, July-August 2003, pp. 628–634.
- [7] McInnes, C. R., “Payload Mass Fractions for Minimum-Time Trajectories of Flat and Compound Solar Sails,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 6, 2000, pp. 1076–1078.
- [8] McInnes, C. R., Hughes, G., e Macdonald, M., “Payload Mass Fractions Optimization for Solar Sail Cargo Mission,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 39, No. 6, November-December 2002, pp. 933–935.
- [9] Gershman, R. e Seybold, C., “Propulsion Trades for Space Science Missions,” *Acta Astronautica*, Vol. 45, No. 4–9, 1999, pp. 541–548.
- [10] Coleman, T. F. e Li, Y., “An interior trust region approach for nonlinear

- minimization subject to bounds,” *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 6, 1996, pp. 418–445,.
- [11] Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H., e Wright, P. E., “Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions,” *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9, No. 1, 1998, pp. 112–147.
  - [12] Meeus, J., *Astronomical Algorithms*, Willmann Bell Inc., Richmond, VA, 1991, pp. 202–204.
  - [13] Colasurdo, G. e Casalino, L., “Optimal Control Law for Interplanetary Trajectories with Nonideal Solar Sail,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 40, No. 2, March-April 2003, pp. 260–265.
  - [14] Garner, Charles E. and Layman, William and Gavit, Sarah A. and Knowles, Timothy, “A Solar Sail Design For A Mission To The Near-Interstellar Medium,” *AIP Conference Proceedings*, Vol. 504, No. 1, January 2000, pp. 947–961.
  - [15] Steinbrenner, J. P., Chawner, J. R., e Fouts, C. L., “The GRIDGEN 3D Multiple Block Grid Generation System,” Wright Research and Development Center Report WRDC–TR–90–3022, Oct. 1989.



# Elenco delle figure

1.1	Znamya-2 . . . . .	4
1.2	Znamya-2.5 (1999) e Znamya-3 (2001) . . . . .	5
1.3	Esperimento New light . . . . .	5
1.4	Cosmos 1 . . . . .	6
2.1	Heliogyro . . . . .	9
2.2	Vela Quadrata . . . . .	10
2.3	Vela Quadrata stabilizzata a tre assi . . . . .	10
2.4	Vela circolare . . . . .	11
2.5	Corpo centrale della vela circolare . . . . .	12
2.6	Esempio di materiale per la realizzazione di vele solari . . . . .	14
3.1	Sistema di riferimento e angoli caratteristici della vela . . . . .	17
3.2	Sistema di riferimento e angoli caratteristici della vela per il modello ottico . . . . .	20
4.1	Schema semplificato della vela . . . . .	23
4.2	Schema del collettore . . . . .	24
4.3	Posizioni del riflettore . . . . .	25
4.4	Zona d'ombra del collettore . . . . .	26
4.5	Superficie bagnata del riflettore . . . . .	27
4.6	interferenza . . . . .	28
4.7	Angoli caratteristici del Solar Photon Thrustor . . . . .	29
5.1	Schema delle forze ideali del SPT . . . . .	34

6.1	Sistemi di riferimento adottati per lo studio delle forze agenti sul collettore . . . . .	37
6.2	Area elementare . . . . .	38
6.3	Sistemi di riferimento adottati per lo studio delle forze agenti sul riflettore . . . . .	41
6.4	Variazione degli angoli di incidenza . . . . .	45
6.5	Spostamenti del riflettore $\alpha$ . . . . .	46
6.6	Terne di riferimento . . . . .	50
6.7	Angoloide di spinta . . . . .	51
6.8	Spinta lungo l'asse x . . . . .	55
6.9	Spinta lungo un asse ortogonale a x . . . . .	57
6.10	Angolo di spinta . . . . .	58
6.11	Angolo di spinta . . . . .	59
7.1	Confronto tra SPT e vela piana nel modello ideale . . . . .	62
7.2	Confronto tra SPT e vela piana nel modello ottico . . . . .	63
7.3	SPT nel modello ideale e ottico . . . . .	64
8.1	Terna di riferimento . . . . .	70
8.2	Relazione tra accelerazioni caratteristiche e $\beta$ . . . . .	71
8.3	Angolo di cono del direttore ottimale per vela solare composta con modello di forza ottico. . . . .	74
8.4	Controllo sulla condizione di convessità per la legge di control- lo riguardante l'angolo di cono del direttore ottimale . . . . .	75
9.1	Tempo di minimo trasferimento Terra-Marte per le date di partenza relative all'anno 2016 . . . . .	80
9.2	Tempo di minimo trasferimento Terra-Marte per le date di partenza relative all'anno 2017 . . . . .	81
9.3	Tempo di minimo trasferimento Terra-Marte rispetto alla MJD	82